DOCUMENT RESUME

ED 133 180 SE 021 737

AUTHOR	Bauersfeld, H., Ed.; And Others
TITLE	Universitat Bielefeld, Institut fur Didaktik der Mathematik, Schriftenreihe des IDM, 1/1974. (University of Bielefeld, Institute for the Teaching of Mathematics, Series of Publications of the IDM, 1/1974.)
INSTITUTION	Bielefeld Univ. (West Germany).
PUB DATE	74
NOTE	159p.; For related documents, see SE 021 735-741; Contains occasional light and small print. In German
AVAILABLE FROM	Institut fur Didaktik der Mathematik, Universitat Bielefeld, Heidsieker Heide 94, D-4800 Bielefeld 15, West Germany (no price quoted)
EDRS PRICE	MF-$0.83 HC-$8.69 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Curriculum; Elementary Secondary Education; Higher Education; *Institutes (Training Programs); *Instruction; Interdisciplinary Approach; International Education; Learning Theories; Mathematical Applications; *Mathematics Education; Teacher Education
IDENTIFIERS	Germany

ABSTRACT

This document contains papers discussing the status of aspects of mathematics education. A brief description of the establishment and operation of the Institute for the Teaching of Mathematics (IDM) is presented first. The lengthier second paper discusses the reconciliation of main aspects of mathematics teaching. The remaining five papers concern: the problem of interdisciplinary instruction, speculations about applied mathematics, a review of Bruner's theories on cognition and curriculum theory, a report on the operation of the French educational research institute (IREM) in advanced teacher training, and comments on a publication from the Soviet author Zankov. (MS)

****
* Documents acquired by ERIC include many informal unpublished *
* materials not available from other sources. ERIC makes every effort *
* to obtain the best copy available. Nevertheless, items of marginal *
* reproducibility are often encountered and this affects the quality *
* of the microfiche and hardcopy reproductions ERIC makes available *
* via the ERIC Document Reproduction Service (EDRS). EDRS is not *
* responsible for the quality of the original document. Reproductions *
* supplied by EDRS are the best that can be made from the original. *
****

ED133180

U.S. DEPARTMENT OF HEALTH, EDUCATION & WELFARE
NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION

THIS DOCUMENT HAS BEEN REPRODUCED EXACTLY AS RECEIVED FROM THE PERSON OR ORGANIZATION ORIGINATING IT. POINTS OF VIEW OR OPINIONS STATED DO NOT NECESSARILY REPRESENT OFFICIAL NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION POSITION OR POLICY

Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik

Schriftenreihe des IDM 1/1974

SE 021 737

"PERMISSION TO REPRODUCE THIS COPYRIGHTED MATERIAL HAS BEEN GRANTED BY

H. Bauersfeld

TO ERIC AND ORGANIZATIONS OPERATING UNDER AGREEMENTS WITH THE NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION. FURTHER REPRODUCTION OUTSIDE THE ERIC SYSTEM REQUIRES PERMISSION OF THE COPYRIGHT OWNER."

2

Allen ungenannten Mitarbeitern des IDM gewidmet

Herausgegeben von: H. Bauersfeld
M. Otte
H.G. Steiner

© Copyright 1974, Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, 4801 Jöllenbeck, Heidsieker Heide 94
Gesamtherstellung: Robert Bechauf, Bielefeld

SCHRIFTENREIHE DES IDM
1/1974

GELEITWORT

von Prof. Dr. K. P. Grotemeyer
Vorsitzender des Gründungsbeirates des IDM

Als die Universität Bielefeld Ende 1969 ihren Betrieb aufnahm, war man noch weithin der Ansicht, daß das Kernproblem aller Schwierigkeiten an unseren Hochschulen rein quantitativer Natur sei. Entsprechende quantitative Maßnahmen wurden dann auch als notwendige und hinreichende Heilmittel verordnet: mehr Studienplätze, mehr Lehrpersonen, mehr Gebäude, alles in allem also mehr Geld. Wohl erst die Unruhe an den Hochschulen hat vor einer breiteren Öffentlichkeit in alarmierender Weise bloßgelegt, daß die Probleme des Hochschulwesens sich nicht allein auf quantitative Aspekte reduzieren lassen, wenngleich sie oft genug dort ihren Ausgang haben. Ebenso falsch wäre es aber auch in einem anderen Einzelaspekt, etwa im Bereich der Organisationsstruktur oder im Bereich der Prüfungsordnungen, jeweils den ausschließlichen Problemkern zu sehen. Es ist vielmehr kennzeichnend für die Problematik im Hochschulwesen, daß sie aus einer Verschränkung vieler und sehr unterschiedlicher Einzelfaktoren besteht, wobei jeder der Faktoren, sowohl selbst qualitative als auch quantitative Komponenten besitzt.

Vor diesem Hintergrund entwickelten die Strukturmerkmale der Universität Bielefeld ein Reformkonzept, das in seiner Weiterentwicklung besonders auf den qualitativen Bereich bezogen ist und die Herstellung eines rationaleren Verhältnisses zwischen Forschung, Lehre und Studium anstrebt. Es sollte ein Beziehungsgefüge geschaffen werden, das in erster Linie durch neue Anstrengungen der

Wissenschaften - einer Wissenschaftsdidaktik - selbst geschaffen werden sollte und nicht allein durch zusätzliche Mittel, veränderte Organisation und Einräumung eines besonderen Schonraums.

Die sich rasant vollziehenden Veränderungen unserer gesamten Lebensverhältnisse machten bewußt, daß die bisherigen Praktiken in unserem Bildungssystem, die überwiegend auf selbständigen Traditionen beruhten und die Entscheidungsprozesse über Ziele und Gestaltung von Unterricht sich vollziehen ließen, in den unterschiedlichsten Institutionen und disparaten Ebenen, in Frage zu stellen seien. Die besondere Kritik bezieht sich sowohl auf die einzelnen Fachwissenschaften, wie auf die Erziehungs- und Sozialwissenschaften. Den ersteren wird vorgeworfen, daß es ihnen nicht gelingt, ihren Fortschritt, sei es im Rahmen der einzelnen Ergebnisse und Erkenntnisse, sei es in der Dynamik des gesamten Systems an die Schule weiterzugeben. Den letzteren, daß es ihnen nicht gelungen sei, trotz der rapide sich vermehrenden Ergebnisse, diese nutzbar zu machen, um dem Lehrer damit Möglichkeiten zu geben, seine Verfahren in besserer Kenntnis ihrer Bedingungen und Wirkungen zu wählen. So ist es nicht verwunderlich, daß der Zustand des Mathematik-Curriculums der allgemeinbildenden Schulen deutlich das Fehlen widerspiegelt einer auf die Gesamtheit der Curriculumentscheidungen bezogenen Planung. In seiner "Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland" zeigt Lenné, daß die traditionelle Schulmathematik keineswegs durch die gegenwärtige "gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik inhaltlich legitimiert wird" und aufgrund von pädagogischen Zielsetzungen eine geplante Abfolge von Lernprozessen darstellt, sondern eine geschichtete Zusammensetzung ist, in der alle vergangenen Auseinandersetzungen um gesellschaftliche Bedeutung und Zielsetzung des Mathematischen Unterrichts sich wiederfinden.

Zwar seien die teilweise recht heterogenen allgemeinen Bildungsziele aufgenommen, jedoch nicht die charakteristische Struktur der Mathematik als Wissenschaft. Lenné spricht in diesem Zusammenhang von der "fachstrukturellen Abstinenz" und meint damit die zunehmende Differenz zwischen der Struktur der Gegenstände des Curriculums der Schulmathematik und der fachwissenschaftlichen Systematik und Wissenschaftsdidaktik.

Vor diesem Hintergrund schreibt die Stiftung Volkswagenwerk großzügig und weitsichtig ein Institut für Didaktik der Mathematik aus. Diese Initiative nimmt auch die Universität Bielefeld auf und legt in ihrer Bewerbung dar, wie sich die Konzeption einer solchen Einrichtung in die wissenschaftsdidaktische Aufgabenstellung einfügt, in einem Problembereich, der ausgeht von den in allen Wissenschaften enthaltenen didaktischen Momenten und Anlässen, den Erkenntnisgang nachvollziehbar zu machen, sowie der Absicht, den Wissenschaftsprozeß herauszuarbeiten. Damit wird dann ein notwendiges Verhältnis zwischen Erkenntnis und Lernen, zwischen Wissensstruktur und Lernstruktur hergestellt (v. Hentig). Das Zustandekommen, die allmähliche Entwicklung der Fragestellung, gehört zur Wissenschaft selbst. Die Forschung folgt keinem vorgeschriebenen Stoffplan. Dem Blick erschließen sich immer neue beziehungsreichere Zusammenhänge und es entstehen neue tieferliegende Fragen; die Wißbegierde wächst. Dieser Prozeß gehört wesentlich zur Erfahrung im Umgang mit Wissenschaft. Hinzuzutreten haben die in jeder wissenschaftlichen Disziplin vorhandenen Grundgedanken und prinzipiellen Einsichten und entsprechenden Verfahren und Instrumentarien, die eine besondere Bedeutung für die Strukturierung von Erfahrungen mit der Umwelt haben.

Ein so angeregter Prozeß der Verwissenschaftlichung von Unterricht ist freilich ein langfristiger Prozeß. Mängel in der Lehreraus- und Weiterbildung führen dazu, daß

bereits Lehrplanänderungen viele Lehrer überfordern. Das macht gleichzeitig deutlich, wie wenig mit der Änderung der Lehrpläne die Reform als abgeschlossen gelten kann. Mit der Verwissenschaftlichung des Mathematikunterrichts geht die Tendenz einher, die Auswahl der Schulstoffe in zunehmendem Maße an der wissenschaftsimmanenten Systematik zu orientieren, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß die Wissenschaft Mathematik bereits in ihren Inhalten und Methoden eng auf jene außermathematischen Probleme der gesellschaftlichen Praxis bezogen ist. Diese Voraussetzung bedarf der Überprüfung. Damit stellt sich die Frage nach der Leistung der wissenschaftlichen Disziplin Mathematik für die Didaktik nicht nur in dem eingeengten Sinne, sondern sie muß auch Antworten auf die Frage finden: Welchen Beitrag leistet die Fachdisziplin Mathematik zum Verständnis der gesellschaftlichen Realitäten ihres Gegenstandes? Sie wird ihrer Aufgabe nicht gerecht, solange sie kritiklos die Verwissenschaftlichung des Unterrichts im Sinne der bestehenden mathematischen Wissenschaft propagiert und Elementarisierung wissenschaftlicher Inhalte und Methoden, deren Übersetzung in die Möglichkeiten des Schulunterrichts, als ihr ausschließliches Geschäft betreibt.

Mit dieser Schrift beginnt das Institut für Didaktik der Mathematik Überlegungen zur eigenen Arbeit vorzulegen. Berichte über laufende und abgeschlossene Untersuchungen werden sicher folgen.

Ausdrücklich sei an dieser Stelle allen herzlich gedankt, die dieses Institut für Didaktik der Mathematik haben arbeitsfähig werden lassen. Der Stiftung Volkswagenwerk, der Fakultät für Mathematik, dem Land Nordrhein-Westfalen und der Universitätsverwaltung und nicht zuletzt dem Gründungsbeirat, der auch künftig als wissenschaftlicher Beirat weiter die Geschicke dieses überregionalen Instituts begleiten wird.

Inhalt

Aufbaustand und Aufgaben des Instituts
für Didaktik der Mathematik 1

Zu einigen Hauptaspekten der Mathematikdidaktik 4

Notizen zum Problem der Interdisziplinarität
von Michael Otte 85

Spekulationen über die Möglichkeiten Angewandter Mathematik von Hermann Dinges 108

Zur Kognitions- und Curriculumtheorie
Rezension von: J.S. Bruner · Relevanz der Erziehung 119

Die Aufgabe der I.R.E.M. in der Lehrerfortbildung, Nationale Kommission der I.R.E.M. 135

Eine interessante Neuerscheinung: L.V. Zankov·
Didaktik und Leben 144

AUFBAUSTAND UND AUFGABEN DES INSTITUTS FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Im Jahre 1969 hatte die Stiftung Volkswagenwerk verschiedene Projekte zur Förderung der Fachdidaktik in der Mathematik und den Naturwissenschaften ausgeschrieben, darunter als Hauptprojekt die Gründung eines zentralen überregionalen Instituts für Didaktik der Mathematik (IDM). Für das IDM bewarben sich mehrere Universitäten. Im Januar 1972 bewilligte die Stiftung Volkswagenwerk einen entsprechenden Antrag der Universität Bielefeld.

Nachdem der Gründungsbeirat für das IDM in Zusammenarbeit mit der Universität Bielefeld und der Stiftung Volkswagenwerk die Vorarbeiten abgeschlossen hatte, konnten 1973 die ersten Stellen besetzt werden. Im Augenblick verfügt das IDM über die folgenden wissenschaftlichen Mitarbeiter:

Prof. Dr. Michael Otte	(ab 1. 5.1973)
Prof. Dr. Heinrich Bauersfeld	(ab 1.11.1973)
Prof. Dr. Hans-Georg Steiner	(ab 18.12.1973)
Dr. Hans Bussmann	(ab 15. 1.1974)
Hans Niels Jahnke	(ab 1.10.1973)
Thomas Mies	(ab 15. 7.1973)
Gert Schubring	(ab 1.10.1973)
Dankwart Vogel	(ab 1. 1.1974)

Gemäß den vom Gründungsbeirat für das IDM erarbeiteten Organisationsgrundsätzen liegen die Aufgaben des Instituts in der Förderung der Mathematikdidaktik durch Forschung, Entwicklung und Beratung. Dazu gehören insbesondere

- die Mitarbeit in Theorie und Praxis an der Curriculumentwicklung im Bereich des Mathematiklernens,

* die Ausarbeitung eines theoretischen Rahmens für Forschungsarbeiten in der Didaktik der Mathematik in enger interdisziplinärer Verbindung zum Stande der Mathematik und der übrigen Bezugswissenschaften,

* die Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses,

* der Aufbau einer internationalen Bibliothek zur Didaktik der Mathematik, die Pflege der Kontakte im In- und Ausland, Informationsvermittlung und Öffentlichkeitsarbeit.

Das IDM wird seine Arbeitsschwerpunkte für die nächste Zukunft noch näher zu bestimmen haben.

Eine im Zuge des stufenweisen Aufbaus im Herbst 1973 gebildete erste Arbeitsgruppe hat begonnen, eine kritische Sichtung und Auswertung der kognitions-psychologischen Arbeiten von Bruner, Piaget u.a. in ihrer Bedeutung für die Mathematikdidaktik durchzuführen. In diesem Zusammenhang sind interdisziplinäre Arbeitsweisen erprobt und theoretisch erörtert worden. Die ersten beiden Beiträge des vorliegenden ersten Heftes der vom IDM veröffentlichten Schriftenreihe, stellen erste Ergebnisse der Arbeitsgruppe dar. Als besonders akute Themen werden Fragen der Reform des Mathematikunterrichts in der Kollegstufe und eine Entwicklungs- und Situationsanalyse über die sog. Neue Mathematik in der Grundschule in Erwägung gezogen.

Im Mai 1974 wird eine Arbeitstagung zusammen mit Mitarbeitern des I.R.E.M., Paris, zu Fragen der Unterrichtsbeobachtung und Problemen der Kooperation mit Lehrern stattfinden.

Für 1974 ist weiter eine gemeinsam mit der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK) veranstaltete internationale Spezialtagung zu Fragen des Geometrieunter-

richts geplant, sowie ein Symposium zu Kognitionspsychologie und Mathematikunterricht. Ferner wird sich das IDM an den Programmvorbereitungen für den 1976 in der Bundesrepublik (Karlsruhe) stattfindenden 3. Internationalen Kongreß für Didaktik der Mathematik, zu dem 2000 Teilnehmer aus allen Ländern der Welt erwartet werden, beteiligen.

Für eine Zusammenarbeit des IDM mit Institutionen am Ort bietet Bielefeld besonders günstige Voraussetzungen. Neben den Fakultäten für Mathematik und für Pädagogik, Philosophie, Psychologie, mit denen das IDM in Forschung und Lehre in enger institutioneller Verbindung steht, sind das Zentrum für interdisziplinäre Forschung, das Institut für mathematische Wirtschaftsforschung, die Laborschule und das Oberstufenkolleg der Bielefelder Universität, die Pädagogische Hochschule und die Schulen im Raum Bielefeld zu nennen.

Die mit diesem Heft begonnene Schriftenreihe soll über die Arbeit am IDM berichten und - neben anderen Organen, wie dem Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - wichtige Informationen aus dem Problembereich des Mathematiklernens in umfassendem Sinne weitergeben. In einzelnen Heften sollen am IDM durchgeführte Untersuchungen, insbesondere Dissertationen zur Didaktik der Mathematik selbst, ausführlich dargestellt werden. Mit dieser Schriftenreihe hoffen wir einen Beitrag zur Entwicklung der Didaktik der Mathematik als Wissenschaft und zur Kommunikation zwischen den beteiligten Disziplinen zu leisten.

Bielefeld, Januar 1974

M. Otte
H. Bauersfeld
H.-G. Steiner

ZU EINIGEN HAUPTASPEKTEN DER MATHEMATIKDIDAKTIK

von H. Jahnke, Th. Mies, M. Otte und G. Schubring

Inhalt

1.	Bezugsprobleme der Didaktik der Mathematik
1.1.	Die Bedeutung der Mathematik
1.2.	Didaktik der Mathematik und Interdisziplinarität
2.	Fragen des Mathematikunterrichts
2.1.	Formalismus und genetischer Unterricht
2.2.	Begriffe als Beziehungen
2.3.	Begriffliche Zusammenhänge und die Natur von Fehlern
3.	Piagets "abstraction réfléchissante"
3.1.	Einleitung
3.2.	Die Spezifik der logisch-mathematischen Erfahrung
3.3.	Triebkräfte der "abstraction réfléchissante"
3.4.	Piagets "abstraction réfléchissante" und die Einschätzung des Formalismus
3.5.	"abstraction réfléchissante" und die Totalität der gesellschaftlichen Aktivität
4.	Bruners Piaget-Kritik
4.1.	Die Bedeutung von kulturellen Technologien
4.2.	Bruners Auffassung von der Rolle der Sprache
5.	Einige vorläufige Hypothesen
5.1.	Sprache
5.2.	Bedeutung
6.	Forschungsprobleme
	Literaturverzeichnis

1. Bezugsprobleme der Didaktik der Mathematik

1.1. Die Bedeutung der Mathematik

Wir sehen für die Didaktik der Mathematik zwei tragende Bezugspunkte. Unsere These [1] zum ersten Bezugspunkt lautet: Die tatsächlich wichtigste und ausschlaggebende Orientierung für eine Didaktik der Mathematik ist die mathematische Wissenschaft selbst und deren reale Entwicklung.

Von allen möglichen verschiedenartigen, sich auf unterschiedliche Aspekte und Momente des Mathematikunterrichts beziehenden Begründungen für diese These wollen wir hier nur eine anführen und zwar deshalb, weil sie uns unmittelbar zu bestimmten zentralen Leitgedanken für diesen gesamten Text führen wird. Diese Begründung lautet: Die mathematische Wissenschaft in ihrer realen Entwicklung ist deshalb die zentrale Orientierung für die Mathematikdidaktik, weil eine Trennung von schöpferischer Tätigkeit und Lernen - bei aller grundsätzlichen Unterschiedlichkeit von Forschen und Lernen - unfruchtbar ist und es nicht gestattet, das Lernen adäquat zu erfassen bzw. den Lernprozeß angemessen anzuleiten. [2] Diese Begründung möchten wir im folgenden in einigen ihrer Aspekte erläutern, wobei keinerlei Vollständigkeit angestrebt werden kann.

1) Die Thesenform unserer Aussage signalisiert, daß wir dieses Verhältnis Mathematikdidaktik - Mathematik als vielschichtiges Problem und nicht als bereits beantwortete Frage oder bare Selbstverständlichkeit ansehen. Im Kern dieses Problems liegt die Frage, wie kann die ganze Vielfalt der mathematischen Wissenschaft in der Didaktik erscheinen und andererseits doch die für die Entwicklung der Didaktik notwendige Einheit erhalten werden.

2) "Nach meinen eigenen Erfahrungen lernen jüngere Kinder fast jeden Gegenstand schneller als Erwachsene, wenn man ihnen diesen in Formen nahebringt, die sie verstehen. Ihnen den Unterrichtsstoff so zu vermitteln, daß sie ihn verstehen, setzt aber interessanterweise voraus, daß man selbst etwas von Mathematik versteht, und je mehr man davon versteht, um so besser kann man sie lehren." D. Page in ((6), S. 50).

Die angesprochene Einheit von Lehren und Lernen verlangt vom Lehrer natürlich zunächst einmal die Fähigkeit, den Unterrichtsstoff in der Perspektive eines fortgeschrittenen theoretischen Niveaus seiner eigenen Disziplin zu vermitteln.

Für den Mathematiklehrer bedeutet dies in erster Linie die Vertiefung seiner Kenntnisse und Auffassungen von der Mathematik, da die mathematische Wissenschaft im Zentrum seines Erfahrungssystems liegt, aber selbst dazu werden ihm neben seiner Unterrichtserfahrung auch seine theoretischen Kenntnisse im Bereich der Naturwissenschaften, der Pädagogik, der Psychologie usw. behilflich sein müssen. So kann man beispielsweise sicherlich den mathematischen Gruppenbegriff nicht adäquat verstehen, wenn man ihn nicht als ein Ordnungsprinzip ersten Ranges im Bereich der Mathematik, der Physik, der Mineralogie und der Chemie erfahren hat, und was den Begriff der Wahrscheinlichkeit anbetrifft, so scheint die neuere Diskussion zu zeigen, daß sich dieser Begriff nur im Gesamtsystem der wissenschaftlichen Begriffe ausreichend begründen läßt.

Was für einzelne Begriffe oder Theorien zutrifft, gilt natürlich erst recht für die Gesamtheit der mathematischen Theorien bzw. für die methodologische Seite der mathematischen Wissenschaft, die deshalb so wichtig für den Lehrer ist, weil sie den Hauptträger der notwendigen Bewußtheit im Lernprozeß darstellt. [1)]

1) Der französische Mathematiker A. Lichnerowicz hat einmal gesagt: "Es ist eine charakteristische Eigenschaft der Mathematik, daß sie sich beständig neu denkt. Das ist sogar eine wesentliche Bedingung für ihren Fortschritt. Ich finde, es kann nicht ein für allemal eine bequeme Konzeption der elementaren Arithmetik oder der elementaren Geometrie geben, eine Konzeption, die man nur im Licht der Erfahrungen der pädagogischen Psychologie zu läutern brauchte. Aber durch die Einheit der Mathematik hindurch erscheinen sogar die Grundbegriffe und Theoreme in völlig neuem Licht." ((19), S. 47).

Insbesondere können und werden sich bei einer derartigen Vertiefung der Kenntnisse sogar Verhaltensweisen und Einstellungen im starken Maße ändern.

Um einem Mißverständnis dieses Aspekts vorzubeugen, das darauf hinausliefe, die Eigenart der pädagogischen gegenüber der wissenschaftlichen Tätigkeit zu unterschlagen, darf dieses Moment nicht von einem zweiten getrennt werden: Grundlage und Selektionskriterium für die Verbindung von Unterrichtsstoff und dem Stand der Theorieentwicklung sind die im Mathematikunterricht selbst gemachten Erfahrungen. Unseres Erachtens ist daher dem Lehrer nicht in erster Linie mit detaillierten Theoriestücken im Sinne von Anweisungen gedient, sondern eher mit einer Verbesserung seiner Orientierungsfähigkeit durch Vermittlung eines theoretischen Verständnisses. Es geht darum, ihm für seine Praxis die durch die Wissenschaft objektiv gegebenen Möglichkeiten auch individuell in angemessener Weise verfügbar zu machen.

Selbstverständlich scheinen detailliertere Rezepte viel bequemer zu sein. Aber sie beruhen erstens auf einem Mißverständnis bezüglich der Möglichkeiten und Zwecke von Theorie und Wissenschaft, und sie verurteilen zweitens den Lehrer zur passiven Rezeption. Wittmann weist auf weitere negative Konsequenzen dieses Bedürfnisses nach Rezepten hin. "Es ist zwar vielfach üblich - und wird leider auch von vielen Lehrern gewünscht -, gegenüber Lehrern theoretische Überlegungen auszuklammern oder zumindest stark zu verkürzen und möglichst schnell zu der Frage "Wie wird es gemacht?" überzugehen. Gerade aus den Erfahrungen mit der Reform des Mathematikunterrichts in den letzten Jahren heraus, halte ich diesen Weg für nicht vertretbar, wenn man erwartet und wünscht, daß aus der Praxis eine artikulierte Kritik an didaktischen Konzeptionen er-

wächst." ((49) Vorwort).

Die Aktivität ist die eigentliche Voraussetzung jedes Lern- und Erkenntnisvorganges, jeder Kommunikation, jedes Informationsaustausches. Demgegenüber hört man in aller Welt Klagen wie die folgende: "Besonders bedauerlich ist es, daß der in der Schule übliche Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften die Schüler nicht zur Aktivität und zum selbständigen Arbeiten erzieht und keine richtige Vorstellung von der Rolle der Wissenschaft im Leben unserer Zeit, sowie von der Bedeutung einer schöpferischen Einstellung zur Wissenschaft vermittelt."

Für die Ausbildung einer solchen schöpferischen Einstellung zur Wissenschaft ist es eine notwendige Voraussetzung, daß ihr theoretischer und ihr methodologischer Aspekt als untrennbar zusammengehörig begriffen und vermittelt wird. Max Planck hat einmal gesagt: "Die Wissenschaft bildet nun einmal sachlich genommen eine innerlich geschlossene Einheit: Die Trennung nach verschiedenen Fächern ist ja nicht in der Natur der Sache begründet, sondern entspricht nur der Begrenztheit des menschlichen Fassungsvermögens, welches zwangsläufig zu einer Arbeitsteilung führt. In der Tat zieht sich ein kontinuierliches Band von der Physik und Chemie über die Biologie und Anthropologie bis zu den sozialen und Geisteswissenschaften. Auch die Methoden, nach denen die Forschung auf den einzelnen Gebieten arbeitet, erweisen sich bei näherer Betrachtung als innerlich nahe verwandt, und nur wegen der Anpassung an den jeweils zu behandelnden Gegenstand wirken sie sich verschieden aus. Das ist gerade in der neueren Zeit immer deutlicher hervorgetreten und hat der gesamten Wissenschaft inneren und äußeren Vorteil gebracht." ((36), S. 270).

Gerade in der Herausarbeitung des methodologischen Aspekts wissenschaftlicher Theorien liegt also ein großes Integrationspotential, wie sich hinzufügen läßt, besonders für die Verbindung von Mathematik mit den anderen Disziplinen. Dies kann allerdings nur dann voll genutzt werden, wenn das Einheitliche auch getrennt wird, und das Spezifische in den einzelwissenschaftlichen Methoden voll zum Tragen kommt. Insofern ist diese Feststellung auf der Basis des heutigen Differenzierungsniveaus der Wissenschaften auch viel weitergehend und tiefer als die Zusammenhangsvorstellungen in der klassischen griechischen Dialektik, bzw. in dem zugleich genialen und dilettantischen Universalismus der Renaissance ausdrückten.

Wie die Konfrontation mit neuen Informationen und die Entwicklung neuer Kenntnisse eine der Entwicklungsbedingungen auch der Denk*faehigkeit* darstellt, so ist entsprechend jeder theoretische Begriff, jede theoretische Aussage und jede Theorie als Einheit der beiden Momente 'Wissen' und 'Werkzeug' zu begreifen. Das Prinzip der "führenden Rolle der theoretischen Kenntnisse im Unterricht", welches erfordert, "daß der kognitive Bereich des Unterrichts in den Vordergrund tritt, sowohl als mächtiges Mittel zur Entwicklung der Schüler als auch als verläßliche Grundlage für den Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten", ((57), S. 40) ist die didaktische Konsequenz aus dieser These. Dabei sind beide Aspekte funktional aufzufassen, d.h., daß der Begriff als Wissen und idealisiertes Objekt gleichzeitig als Integrationspotential für neues Wissen, für neue Informationen, neue Begriffe und Methoden fungiert, daß er dabei weiterhin die Momente seiner Integration in übergreifende Begriffe und Theorien, die Reflexion seiner Begrenztheit und Vorläufigkeit mit repräsentiert. Der Aspekt des Werkzeugs, der

Technik, der Methode bezieht sich in unmittelbar einsichtiger Weise auf die Benutzung wissenschaftlicher Kenntnisse in Problembearbeitungsprozessen. Dabei mag in den einzelnen Begriffen oder Theorien der eine oder andere Aspekt stärker in den Vordergrund treten, man denke etwa an die augenblickliche Diskussion um das Verhältnis von Rechenfertigkeit und Mengenlehre im mathematischen Unterricht. Dieses Beispiel zeigt auf der anderen Seite ganz deutlich, daß, wenn die Mengenlehre nicht in der Einheit der Aspekte des 'Wissens' und des 'Werkzeugs' im Unterricht entwikkelt werden kann, sich auch mit den diffizilsten und virtuosesten Methoden kein Zusammenhang zur klassischen Schulmathematik bzw. zur Rechenfertigkeit herstellen lassen wird, genauso wenig, wie sich die traditionelle Arithmetik betreiben läßt, ohne daß die Einheit von Wissen und Methode dabei herausgearbeitet wird.

Nun ist in der neueren didaktischen Diskussion, gerade in der guten Absicht, den Formalismus im Mathematikunterricht zu bekämpfen, des öfteren diese Einheit zertrennt worden. Unseres Erachtens ist jedoch eine Trennung von Wissen und Werkzeug, von Denken und Handeln nicht sinnvoll möglich, schon allein aufgrund der Tatsache, daß es keine Beobachtung ohne theoretische Konzeption, keine Experiment ohne Hypothese gibt. Dementsprechend erscheint uns auch die Gegenüberstellung von'Mathematisieren'versus 'Mathematik als Fertigfabrikat' in Form einer Abtrennung voneinander nicht als sinnvoll. Das Problem der Lehre und des Lernens ist es gerade, das Gedachte und das Denken, das Handeln und sein Resultat gleichzeitig zusammenzubringen. Anders, beispielsweise als strikte Abwechslung ohne Momente der Gleichzeitigkeit, wäre beider Zusammenhang und beider Entwicklung überhaupt nicht sinnvoll verstehbar. Natürlich läßt sich

mit einer solchen Zerstückelung dieses inneren Zusammenhangs eine notwendigerweise statische Ordnung der fertigen Mathematik als Resultat der historischen Entwicklung entwerfen. Dies wird auch von R.L. Wilder in (48) vorgenommen. In der dortigen Hierarchie der mathematischen Strukturen sind es dann tatsächlich die Strukturen des jeweils höheren Abstraktionsniveaus, die die Behandlung von Strukturen des vorangegangenen Niveaus gestatten. Der Übergang zwischen den verschiedenen Stufen bzw. ihr Zusammenhang, d.h. die Mathematik als Tätigkeit, als Lern- bzw. als Entwicklungsprozeß wird damit aber noch keineswegs erfaßt.

1.2. Didaktik der Mathematik und Interdisziplinaritaet

Wahrscheinlich überraschend für manchen führen uns diese Unzulänglichkeiten der Selbstreflexion der Mathematik zu dem zweiten Hauptaspekt der Mathematikdidaktik: nämlich ihrer *Interdisziplinaritaet*.

Der funktionale Charakter von Bedeutung und Wissen, die Tatsache, daß sich kein Begriff, keine theoretische Aussage und keine Theorie selbst zu erklären vermögen, begründet diese Interdisziplinarität zwar implizit, aber einheitlich und entwickelbar und damit effektiver als das bloße Aneinanderreihen von Faktoren des Mathematikunterrichts. [1] Dazu wollen wir uns das zuletzt Gesagte nochmals mit Hilfe des Bildes des Maßstabes verdeutlichen: Nichts in der Welt ist

1) Wie in einem Artikel zum Thema der Interdisziplinarität in diesem Heft dargelegt, besteht der Kern der problemorientierten, interdisziplinären wissenschaftlichen Tätigkeit darin, daß sich jede der beteiligten Disziplinen dem Anspruch stellt, die Theorien der anderen Fachdisziplinen zur eigenen Methode zu machen.

durch sich selbst meßbar. Und das gilt umso mehr für eine Theorie, die wirklich fruchtbar ist, wirklich wissenschaftlichen Charakter besitzt, d.h. für eine Theorie, deren Aussagen und Begriffe die 'Bedeutsamkeit des wirklich Existierenden' (Thom) und nicht die Unverbindlichkeit bloßer Metaphern oder formaler Analogien besitzen. Unsere Orientierung bezüglich der Mathematik, bzw. die Begründung unserer eingangs formulierten These bezieht sich nicht auf die einzelne Aussage oder die einzelne mathematische Formel, sondern betrifft den Charakter der Praxis der mathematischen Wissenschaft selbst und deren Entwicklung. Und daher benötigen wir, wie gesagt, eine genügend beziehungsreiche Struktur der Analyse.[1)]
Was die Mathematikdidaktik angeht, so entnehmen wir dem Vortrag des großen französischen Mathematikers R. Thom auf dem zweiten internationalen Kongreß für Mathematikdidaktik in Exeter die folgende Passage: "Tatsächlich beruht, ob man das nun wahrhaben will oder nicht, alle mathematische Pädagogik ..... auf einer Philosophie der Mathematik". ((22), S. 204).

Dies hat unseres Erachtens in zweifacher Hinsicht Gültigkeit, einmal gilt es unmittelbar im strikten Sinne, auf der anderen Seite ist der Prozeß des Mathematiklernens mit seinen Gesetzmäßigkeiten und Bedingungen ein eigener Forschungsgegenstand, der nur interdisziplinär bearbeitet werden kann, für den die methodologischen bzw. wissenschaftstheoretischen Ergebnisse der mathematischen Wissenschaft die Grundlage der Integration der Disziplinen bilden.

Gerade an der Mathematikdidaktik zeigt es sich ganz deutlich - und wir werden das später noch im Detail

1) In der Systemanalyse würde man sagen: Es muß dem Prinzip des 'maximal loop' gefolgt werden. (vgl. (9), S. 132 f)

kritisieren -, daß ein bloß eklektisches Aneinanderreihen der einzelnen wissenschaftlichen und praktischen 'Bezugspunkte' und Verfahren nur geringen Fortschritt bringt. Wittmann konstatiert eine Parallelität von Didaktik der Mathematik und Operations Research bezüglich der sozialpsychologischen Probleme ihrer Entwicklung: "Interessanterweise werden auch andere, erst im letzten Jahrzehnt entstandene Grenzdisziplinen, wie ..... Operations Research oft ähnlich bewertet wie die Fachdidaktiken." ((53), S. 121).

Unseres Erachtens geht diese Parallelität ihrem Wesen nach, wenn auch nicht bezüglich ihrer Erscheinungsformen, viel weiter. Die Operations Research hat sich entwickelt, weil der Grad und das Ausmaß von Arbeitsteilung, Spezialisierung und Verflechtung der einzelnen Teilfunktionen im Bereich der industriellen Produktion ein wissenschaftliches Herangehen an die zahlreichen, damit im Zusammenhang stehenden praktischen Probleme erforderte. Dabei stellte weniger der rein quantitative Umfang der Probleme die eigentliche Schwierigkeit dar, sondern vielmehr die Komplexität ihrer wechselseitigen Abhängigkeit. Operations Research setzt sich das Ziel, für die Beherrschung einer so hochgradigen Komplexität Methoden und Verfahren zur Verfügung zu stellen. Dies zwingt sie von Anfang an zur Interdisziplinarität. Churchman und andere nennen in ihrem klassischen Einführungsbuch in die Operations Research zwei Gründe: einmal den Systemcharakter der Gegenstände von Operations Research und ihre innere Differenziertheit, die nur einem differenziert zusammengesetzten Wissenschaftlerteam zugänglich sind, zweitens die qualitativ neuen Anforderungen an die Methodologie dieser Disziplin, die nur bei voller Ausschöpfung des methodologischen Reichtums vieler Einzelwissenschaften und der Über-

tragbarkeit ihrer Methoden bewältigt werden können. ((10), S. 19/20).

Nicht gänzlich überraschend findet sich daher bei Churchman und anderen die folgende Passage: "Lehrbücher über traditionelle Forschungsgebiete wie Physik und Chemie beschäftigen sich nur sehr oberflächlich mit wissenschaftlichen Methoden. Ihr Hauptaugenmerk gilt den Verfahren und Hilfsmitteln. Das vorliegende Buch legt besonderen Nachdruck auf Methoden, weil in einem neuen Forschungsgebiet *die Art und Weise, wie man an ein Problem herangeht*, wichtiger ist als die dabei verwendeten Verfahren und Hilfsmittel.[1] ((10), S. 21). (Hervorhebungen von uns).

Wir haben bereits an anderer Stelle die grundsätzliche Bedeutung von Methodologie im umfassenden Sinne für die Interdisziplinarität erörtert und möchten darauf aufbauend einige die Entwicklung einer wissenschaftlichen Mathematikdidaktik betreffende Probleme kurz zu skizzieren versuchen. Dabei stützen wir uns auf Bereiche, in denen die Mathematik schon lange im interdisziplinären Zusammenhang anderer wissenschaftlicher Bemühungen genützt wird, z.B. in der Physik. Als Mathematikstudent hatte man immer Schwierigkeiten zu sehen, welche Terme einer nicht exakt lösbaren Gleichung (Differential- oder Integralgleichung) korrigiert bzw. vernachlässigt werden durften und welche nicht, weil man nicht über genügend physikalische Erfahrungen verfügte, sondern als bloßer Mathematiker an ein solches physikalisches Problem heranging. Eben-

1) "Die Methodologie auch der Mathematikdidaktik bedarf einer klaren Grundlegung. Angesichts der allgemeinen außerordentlichen Differenzierung der Verhältnisse erfordert diese jedoch primär den Soziologen und Systemtheoretiker. Die Fachmathematik wird dabei als Informationsbasis unentbehrlich sein." ((24), S. 284).

so ist die spezielle Relativitätstheorie nicht adäquat bloß als Invariantentheorie der Lorentz-Gruppe, d.h. als eine Geometrie im Sinne Felix Kleins, zu verstehen. "Die Relativitätstheorie besteht nicht nur darin, einen Typ von mathematischem Modell zu entwickeln, das sich auf die Kenntnisse der Vorgänge in Zeit und Raum anwenden läßt, sie schließt auch - und das ist wesentlich - eine Bemühung zur experimentellen Verifizierung und ein Abstecken der eigenen Grenzen ein. Gewiß, die Lage dieser Grenzen wird erst klar, wenn die Bedingungen für ein Überschreiten der Relativitätstheorie gegeben sind, ebenso wie sich die Grenzen der klassischen Mechanik wesentlich klarer zeigten, als die Relativitätstheorie entstand." (Ph. Cazelle).

Ein Hauptübel im Bereich der Mathematik und ihrer Lehre ist der Formalismus in seinen verschiedensten Erscheinungsweisen und Ausprägungen. Es ist so schwer zu fassen, weil man es seiner Natur nach nicht in der Form eines ein für allemal zu behebenden Fehlers oder Irrtums behandeln kann. Der entsprechende Versuch wäre sogar ein sicherer Weg, den Formalismus zu bekräftigen. Die Auseinandersetzung mit formalistischen Tendenzen stellt gewissermaßen einen roten Faden für die Kommunikation im Bereich der mathematischen Wissenschaft dar. Besonders deutlich wird das natürlich, sobald neue Anforderungen an die Mathematik bzw. an den mathematischen Unterricht herangetragen werden. Ein spektakuläres Beispiel dafür bildet zweifellos die schon erwähnte Diskussion um die (naive) Mengenlehre in der Schule.

Was die dabei zugrunde liegende Philosophie der Mathematik betrifft, so sagt Thom in dem erwähnten Vortrag: "Die modernistische Tendenz stützt sich wesentlich auf eine formalistische Auffassung von Mathematik. Eine Auffassung, wie sie in klassischer Weise in dem be-

rühmten Aphorismus von B. Russel zum Ausdruck kommt: 'Als Mathematik kann der Bereich definiert werden, in dem wir niemals wissen, worüber wir sprechen, noch wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.' Die Opponenten dieser Auffassung insistierten andererseits auf eine Verankerung der Mathematik in der Wirklichkeit". ((22), S. 204) Thom schließt sich dieser letzten Gruppe an mit der These: "Das wirkliche Problem, mit dem sich der Mathematikunterricht auseinandersetzen muß, ist nicht das der Strenge, sondern das Problem der Entwicklung der 'Bedeutung', der 'ontologischen Rechtfertigung' mathematischer Objekte." ((22), S. 202).

Warum Thom der logischen Strenge eine so untergeordnete Stellung im Mathematikunterricht zuweist, und auf eine 'Philosophie der Wissenschaft' so großen Wert legt, läßt sich an einem Beispiel, welches populär ist, welches aber nicht aus der Mathematik stammt, gut diskutieren und verdeutlichen, und zwar an dem Beispiel des *Atomismus*. Heisenberg nennt die atomistischen Vorstellungen den eigentlichen Inhalt des Weltbildes des Materialismus des 19. Jahrhunderts. Im 19. Jahrhundert gewinnen atomistische Vorstellungen zunächst im Bereich der Chemie durch J. Dalton an Bedeutung. Für Dalton war die Vorstellung des Atoms ein Funktionsmodell. Dabei gewannen die Chemiker durch seine Atomtheorie nicht neue Experimentiergesetze, "sondern eine neue Art und Weise, Chemie zu praktizieren, und das erwies sich als so fruchtbar, daß nur wenige der älteren Chemiker in Frankreich und Großbritannien ihm zu widerstehen in der Lage waren. Somit gelangten die Chemiker in eine Welt, wo sich die Reaktionen ganz anders verhielten als vorher." ((23), S. 197). Auch die Physik wurde zum Schauplatz der Auseinandersetzungen um die Atomtheorie. Darüber schreibt Max Planck: "Die atomistische Idee ist uralt,

aber eine brauchbare Formulierung fand sie erst in der kinetischen Gastheorie, welche um die Zeit der Entdeckung des mechanischen Wärmeäquivalents entstand, um, zunächst von den Energetikern scharf bekämpft, eine Zeitlang ein bescheidenes Dasein zu führen, schließlich aber gegen Ende des vorigen Jahrhunderts dank der Fortschritte der experimentellen Forschung sich sehr schnell durchzusetzen." ((36), S. 274).

Poincaré und Zermelo widersetzten sich in dieser Auseinandersetzung gegenüber Stephan Boltzmann auf der Basis des 'Poincaré'schen Wiederkehrsatzes' atomistischen Vorstellungen und damit einer materialistischen Naturerklärung. Sie sagten etwa: Wenn die Atomistik und die auf ihr beruhende statistische Mechanik - das hieß für sie die materialistische Naturerklärung - dazu führt, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik keine exakte Gültigkeit haben kann, so ist die Atomistik grundsätzlich falsch oder unzureichend. Ein weiterer Höhepunkt in dieser Auseinandersetzung war die Kontroverse zwischen Ernst Mach und Max Planck. Obwohl sich Max Planck selbst erst ziemlich spät dazu durchgerungen hat, daß im "Lichte der atomistischen Betrachtung der zweite Hauptsatz der Thermodynamik als ein statistischer, ein Wahrscheinlichkeitssatz erscheint" (36) und so auch verstanden werden muß, waren es doch gerade seine eigenen Entdeckungen, die den atomistischen Vorstellungen zum Durchbruch verhalfen. Auf philosophischer Ebene wurden - ganz unabhängig und wesentlich früher - ähnliche Überlegungen zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik mit ähnlich gegensätzlichen Schlußfolgerungen, wie sie von Poincaré/Zermelo einerseits bzw. Boltzmann und später Planck andererseits gezogen worden waren, von Nietzsche in seiner Lehre von der 'Ewigen Wiederkehr' einerseits und kontrovers dazu von Engels mit seiner These vom geschichtlichen Cha-

rakter der Naturprozesse angestellt. [1]

Die Auseinandersetzungen haben sich, zum Teil als Debatte um den Positivismus im Bereich der Atomphysik in unserem Jahrhundert fortgesetzt. Die klassischen Voraussetzungen der antipositivistischen Vorstellungen sind von Max Planck geprägt worden: "Die beiden Sätze: es gibt eine reale, von uns unabhängige Außenwelt und: die reale Außenwelt ist nicht unmittelbar erkennbar, bilden zusammen den Angelpunkt der ganzen physikalischen Wissenschaft." ((36), S. 234). Die Debatte um diese Probleme hat, wie die Diskussion in den Bereichen der Informatik, Kybernetik und der Informationstheorie zeigen, nichts an Aktualität eingebüßt. Beispielsweise entnehmen wir einem 1971 erschienenen Werk des konservativen Informatikers Karl Steinbuch die folgende Passage: "... es zeigte sich, daß Materie und Energie ineinander umgewandelt werden können. ... Aus dieser Umwandelbarkeit und aus der Tatsache, daß die Atome sich nicht als die letzten Bausteine der Materie erwiesen, wurde in der ideologischen Auseinandersetzung vielfach der Schluß gezogen, die Materie 'verschwinde'. Damit wird aber die Problematik nur verdunkelt. Die Materie verschwindet nicht, sie zeigt nur bei genauerer Betrachtung andere Eigenschaften als bei oberflächlicher Betrachtung. Es stimmt nicht, daß ein Stück Materie nach neueren Erkenntnissen kein Stück Materie mehr sei, sondern beispielsweise etwas *Geistiges*." ((43), S. 9).

Sieht man sich nun andererseits irgendein Lexikon zur Physik oder ein Lehrbuch an, so wird über diese grundlegenden Fragen immer mit den verwaschensten

1) Zur näheren Erläuterung dieser philosophischen Hintergründe des Atomismus-Streites, vgl. (3), (36) u. (45).

Formulierungen hinweggegangen. Es wird nicht die notwendige Mehrdeutigkeit der Begriffe herausgestellt, ihre Differenzierung, die sie zugleich disparat und einheitlich macht. Es wird nicht gezeigt, daß jede objektive Erkenntnis notwendigerweise Vereinseitigungen impliziert, daß jeder Begriff verschiedenartige und gegensätzliche Aspekte enthält, die seine Definition nicht zum Verschwinden bringt, die sie aber doch zu einem Moment produktiver Anwendung und Weiterentwicklung zusammenfaßt. Es werden vielmehr die verschiedenen Begriffe der Atomphysik und die unterschiedlichen Atomvorstellungen entweder von vornherein vollkommen relativiert und als bloße, für den naiven Alltagsverstand zurechtgezimmerte Analogien hingestellt, oder, wenn man dann als Schüler oder als Student der Physik gezwungen ist, sich tiefer einzuarbeiten, erscheint einem die Atomphysik als eine Sammlung zusammenhangloser und damit unverständlicher Sätze. Der Kern der Auseinandersetzung, wie er von der physikalischen Wissenschaft und der Philosophie in den letzten 100 Jahren geführt worden ist, wird in keiner Weise herausgearbeitet und für das Verständnis nutzbar gemacht. Man muß Y. Elkana zustimmen, wenn er sagt: "... es ist nur die Taktik der Wissenschaft, die von den üblichen Lehrbüchern ... herausgehoben wird. Meiner Meinung nach hat jeder wissenschaftliche Unterricht der Strategie der Wissenschaft einen ebenso bedeutenden Platz zuzuweisen wie ihrer Taktik." Und zum Unterricht in Atomphysik meint er: "Anstatt zahlreiche Beispiele für die probabilistische Interpretation der Wellenfunktion zu bringen, würden wir den Lernenden mehr bereichern und mehr zu seiner wissenschaftlichen Erziehung beitragen, wenn wir ihm den fundamentalen philosophischen Zusammenprall zeigten, der hinter der Einstein-Bohr-Diskussion steckte. Ich bin der Meinung, daß diese Debatte für das Lehren von Wissenschaft auf jedem Niveau relevant ist und daß

jedes Buch, welches die Wellenfunktion oder das Korrespondenzprinzip erwähnt, diese Debatte ebenfalls erwähnen muß." ((12), S. 33).

Eine sehr anschauliche Beschreibung dieser Unzulänglichkeiten des Physikunterrichts, die möglicherweise in den Einzelheiten überholt ist, entnehmen wir den Erinnerungen von Werner Heisenberg. Er schreibt über das von ihm als Schüler zu benutzende Physiklehrbuch, in welchem auch einiges über die Atome zu lesen stand und in welchem sich sogar ein Bild befand, auf dem eine größere Anzahl von Atomen zu sehen war: "Das Bild sollte offenbar den Zustand eines Gases im kleinen wiedergeben. Einige Atome hingen jeweils in Gruppen zusammen, und zwar waren sie durch Haken und Ösen, die wahrscheinlich die chemischen Bindungen darstellen sollten, miteinander verknüpft. Außerdem war im Text zu lesen, daß die Atome nach der Ansicht der griechischen Philosophen die kleinsten unteilbaren Bausteine der Materie seien. Dieses Bild hat mich immer zu heftigem Widerspruch gereizt, und ich war empört darüber, daß so etwas Dummes in einem Physiklehrbuch stehen konnte, denn ich dachte: Wenn die Atome so grob anschauliche Gebilde sind, wie das Buch uns glauben machen wollte, wenn sie eine so komplizierte Gestalt haben, daß sie sogar Haken und Ösen besitzen, dann können sie unmöglich die kleinsten unteilbaren Bausteine der Materie sein." ((20), S. 40).

Widersprüche dieser Art, Widersprüche, wie sie übertragen auf den Mathematikunterricht etwa zwischen der formalistischen Strenge in mathematischen Lehrbüchern und deren substantiellem Gehalt einerseits, ihrem theoretischen Grundverständnis auf der anderen Seite auftreten, findet man auf Schritt und Tritt, und sie sind es, die tatsächlich den Lernprozeß der Kinder entscheidend stören oder sogar zerstören. Nun

war die Praxis des mathematischen Unterrichts natürlich aufgrund der täglich auftretenden Erfordernisse oft weiter als der Bewußtseinsstand der didaktischen und methodologischen Reflexion, aber die Trennung von Theorie und Praxis zeigte auch hier die widersprüchlichsten Resultate. Praktische Erfahrung ist notwendig, aber sie ist nicht mehr ohne theoretische Reflexion angemessen verarbeit- und entwickelbar. Denn wie der englische Logiker und Mathematiker A.N. Whitehead feststellt, ist "im Bereich des schöpferischen Denkens der gesunde Menschenverstand ein schlechter Lehrmeister. Sein einziger Maßstab für die kritische Beurteilung ist der, ob die neuen Ideen den alten ähnlich sind oder nicht." ((47), S. 90)

2. *Fragen des Mathematikunterrichts*

2.1. Formalismus und genetischer Unterricht

Die Abschnitte 1.1. und 1.2. haben uns ganz ähnliche Probleme hinterlassen: Probleme des fehlenden aber notwendigen Zusammenhangs. Im Hinblick auf die bewußtseinsmäßige Wirkung jedes nicht gesehenen, aber zugleich als notwendig erkannten Zusammenhangs wollen wir eine derartige Zusammenhanglosigkeit einen Widerspruch nennen. Ein solcher Widerspruch wirkt vorwärtstreibend, wirkt produktiv, wenn die Möglichkeit zur Herstellung des Zusammenhangs, der Beziehung vorhanden ist. Er wirkt zerstörerisch oder hemmend, wenn er absolut ist. Bevor wir auf das Hauptproblem des Zusammenhangs von Denken und Handeln zurückkommen, möchten wir mit einigen *Thesen* zum Unterricht beginnen, die sich an das bisher Vorgestellte anschließen:

Im wissenschaftlichen Unterricht lernt man *Begriffe*. Dies scheint sachlogisch bzw. methodologisch gemeint; es impliziert jedoch auch psychologisch bzw. didaktisch eine Fülle von Fragen.

Man lernt Begriffe als die Einheit von *Wissen* und *Werkzeug*, die sie darstellen; oder wieder methodologisch: als Einheit von *Struktur* und *Funktion* (operativer Bewegung).

Kein theoretischer Begriff versteht sich von selbst. Insbesondere existieren Begriffe nicht unmittelbar im Bewußtsein. Das Gegenteil dieser Aussagen liegt dem reduktionistischen Erklärungsprinzip vieler sogenannter genetischer Unterrichtsmethoden zugrunde, jenen Versuchen der Verankerung der wesentlichen Begriffe im Selbstverständlichen (d.h. im allgemeinen: in der

Alltagsanschauung). Wir können dabei keinen wesentlichen Unterschied zu dem Reduktionismus der formalen Logik sehen, nämlich zu dem dort gehandhabten Prinzip des *minimal loop* $x = x$, welches davon ausgeht, daß jede Aussage und jeder Begriff sich einfach selbst impliziert. Das Erklärungsprinzip jener genetischen Methoden möchte die Allgemeinheit wichtiger Begriffe vorab mitteilen, um damit Motivation, d.h. Triebkräfte für den Lernprozeß zu erzeugen. Wohin führt das? Ein Beispiel. In einem Lehrbuch der *Infinitesimalrechnung in genetischer Darstellung* [1] findet sich im Vorwort folgende Charakterisierung des grundlegenden Prinzips: "Eine sowohl in formaler als auch intuitiver Hinsicht zentrale Rolle bei der hier vorliegenden Darstellung spielt das Approximationsprinzip. Es wird bei der Stetigkeit (lokale Approximierbarkeit durch konstante Funktionen) vorbereitet ... und dann entsprechend den modernen Auffassungen auf die Differenzierbarkeit (lokale Approximierbarkeit durch lineare Funktionen) ... angewandt". (50)

Jeder Student weiß, daß die konstanten Funktionen spezielle lineare Funktionen sind, und er schließt daher, daß jede stetige Funktion differenzierbar sein müßte. Hier wird man einwenden, es handele sich doch um verschiedene Approximationsbegriffe, d.h. eigentlich um die Entfaltung und Veränderung des Begriffs der Approximation und die Entwicklung dessen, was man unter Approximationsprinzip verstehen könnte. Das steht jedoch *erstens* nicht in jenem Text, und die zitierte Verwirrung der Studenten ist nicht von uns erdacht, sondern hat sich tatsächlich ereignet, und als man sie *zweitens* behoben hatte, blieb von der ganzen didaktischen Absicht des Textes nichts mehr übrig. Denn wenn man nun den

1) Über dessen mathematische Substanz wird hier in keiner Weise geurteilt.

statischen und selbstverständlichen Charakter der grundlegenden Begriffe und damit die Verankerung vorab in einer nicht weiter zu entwickelnden Anschauung aufgibt und erkennt, daß es sich um die Entfaltung des Begriffs als System von Beziehungen handelt, dessen Allgemeinheit sich erst mit der Differenzierung dieses Systems entwickelt, dann verschwindet gerade das Spezifische der Absicht dieser genetischen Auffassung. Es ist beispielsweise nicht mehr so unmittelbar einsichtig, wo denn der Unterschied liegt zu einer beliebigen, etwa einer deduktiv aufgebauten Vorlesung. Man könnte ebenso gut sagen, es handelt sich bei einer solchen Vorlesung, z.B. über Vektorraumtheorie, um die Entfaltung des Begriffs des *linearen Raumes*. D.h. so unmittelbar verstanden stellt diese genetische Methode theoretisch gar keine wirkliche Alternative zu einer sogenannten deduktiven Methode dar. Den Scheincharakter dieser Alternative auch in unterrichtsmethodischer Hinsicht stellt der folgende Abschnitt aus dem bekannten Buch von Lenné ((24) S. 71) sehr schön dar: "Die Parallelität der beiden Unterrichtsformen kann noch etwas schärfer herausgearbeitet werden. Der genetische Unterricht muß im Hinblick auf seinen Zeitbedarf danach streben, das Ausgangsmaterial für die Eigenentdeckungen der Schüler so zu entwickeln, daß die Schülerspontaneität auf kurzem Weg zum Ziel kommt. Der Erläuterungsunterricht seinerseits muß im Hinblick auf eine gute Verinnerlichung und Motivation versuchen, die Begriffe und Definitionen, mit denen er arbeitet, auf leicht fassliche, quasi anschauliche Muster zu stützen. Die damit formulierten unterrichtsmethodischen Probleme beider Unterrichtsformen lassen sich auf durchaus ähnliche Problemstellungen bringen". *Allein* mit dem Prinzip der Anschaulichkeit wird die formale Abstraktheit nicht beseitigt, sondern eher noch gefestigt.

Die theoretische Frage, um die es geht, ist ernster, als man jetzt vielleicht meinen möchte, sie betrifft nämlich

den mit der Erfahrung verknüpften Prozeß der Entwicklung mathematischer Begriffe und Theorien bzw. ihrer individuellen Aneignung. Sie steht heute unter den Prämissen, die sich aus dem bekannten Gödel'schen Resultat ergeben. Empirismus und Idealismus (Platonismus) scheinen dabei auf die nämlichen Schwierigkeiten zu stoßen. Sie werden auch, wie man am obigen Beispiel und an anderen sehen kann, gleichzeitig oder abwechselnd durcheinander in der genetischen Didaktik benutzt. Der zitierte Versuch, bereits bei der Einführung diejenigen Züge herauszuarbeiten, "die einen Rahmen für ein Gesamtverständnis schaffen und einen nachträglichen Einbau von Einzelheiten erlauben" (52), hat für sein Gelingen kompliziertere Bedingungen [1], als sie der Idealismus zu lösen vermag, auf den sich Wittmann beruft. E. Wittmann ist sich über den erkenntnistheoretischen Hintergrund seiner didaktischen Vorschläge durchaus im klaren und behandelt jene Alternativen explizit, die von uns als extreme Ausformulierung einer Position der Trennung von Reflexion und Aktion betrachtet werden. Er sagt, es handele sich dabei um zwei philosophische und weltanschauliche Positionen "mit grundsätzlich verschiedenen Bildern des Menschen, die sich schon seit Jahrhunderten gegenüberstehen", einerseits den Empirismus, "nach dessen Auffassung die exakten Wissenschaften durch unmittelbare Abstraktion aus einer an sich gegebenen Wirklichkeit gewonnen werden. Der empiristische Beobachter versucht jeden subjektiven Einfluß auszuschalten und gleichsam unbewegt die objektiven Daten zu registrieren. Er ist gewohnt, die Wirklichkeit 'hinzunehmen'. Im Kant'schen Idealismus und seinen Nachfolgetheorien wird das Verhältnis zwischen dem erkennenden Subjekt und der Wirklichkeit grundsätzlich anders gesehen. Als Beispiel möge die Piaget'sche Erkenntnistheorie dienen.

1) Zu einem Aspekt dieses Sachverhaltes vgl. die in 1.1. zitierte Bemerkung von A. Lichnerowicz.

Nach ihr ist das erkennende Subjekt bereits mit einer kognitiven Struktur ausgestattet". (49).

Mag schon der Rückbezug auf den Kant'schen Apriorismus für jeden Mathematiker mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien im 19. Jahrhundert sehr problematisch geworden sein, so scheint die Reklamation der Piaget'schen Erkenntnistheorie für den Apriorismus oder Idealismus explizit falsch zu sein. Piaget sagt nämlich: "... der operative Konstruktivismus, wie ihn die Analyse der genetischen Erkenntnistheorie nahelegt, kann weder auf den *Empirismus* noch auf den *Apriorismus* zurückgeführt werden, weil wir nicht die Intelligenz selbst aus den Objekten ableiten können und weil das Erkenntnissubjekt nicht Strukturen besitzt, die von vornherein alle Vernunft enthielten, sondern es verfügt lediglich über eine gewisse Aktivität, die es ihm erlaubt, operative Strukturen zu konstruieren" ((4) S. 285, vgl. auch S. 190). Und er betont mehrmals, daß der genetische Standpunkt einen dazu führt, diese falsche Alternative (von Empirismus oder idealistischem Apriorismus) in "anderen Beziehungen zu sehen. Und zwar in dem Sinne, daß er die Möglichkeit eines *tertium* zwischen Erfindung (oder freier Schöpfung) und Entdeckung (oder unvorhergesehenen Kontakt mit der äußeren Wirklichkeit) nahelegt" ((4) S. 198). Wir werden auf dieses Problem des tertium noch zurückkommen.

2.2. Begriffe als Beziehungen

Zunächst wiederum eine These:
Begriffe finden sich nicht einfach in der empirischen Wirklichkeit vor, denn sie enthalten Verhaeltnisse, Beziehungen von Dingen und nicht Dinge oder Eigenschaften von Dingen.

Die falsche Alternative von *Mathematisieren* und *Mathematik*

als Wissen führt in der Didaktik zuweilen unerwartet auch erfahrene Wissenschaftler zu empiristischen Vorstellungen. So sagt etwa Freudenthal: "Im Anfang des Geometrieunterrichts steht das mathematische Ordnen der Erscheinungen im Raum, wodurch Gestalten zu Figuren werden", dadurch hat der Schüler die Gelegenheit, "einen nichtmathematischen Stoff selbst zu mathematisieren" ((14), S. 119). Unseres Erachtens bestehen alle theoretischen Fähigkeiten und entsprechend auch die Fähigkeit der geometrischen Orientierung im permanenten Ersetzen von Verfahren und Begriffen durch bessere, präzisere, allgemeinere Verfahren und Begriffe und nicht in der Subsumtio einer nichtmathematischen bzw. noch nicht mathematisierten Wirklichkeit unter eine mathematische Struktur. Diese Vorstellung entspringt unseres Erachtens dem empiristischen Mißverständnis vom Verhältnis Mathematik (Theorie) zur Empirie, zur Wirklichkeit. Es wäre nicht zu sehen, wie sich ein theoretisches Modell weiterentwickeln, verallgemeinern, adäquat verändern ließe, wenn es nicht in der Entwicklung seines theoretischen Zusammenhangs auch in permanenter Distanz zur Wirklichkeit gehandhabt würde; in dem Sinn etwa, in dem Dinges sagt: "Mit Anwendung (einer mathematischen Theorie) meint man ohnehin oft nur, daß man neben ein reales Phänomen ein leichter durchschaubares Modell stellt, um den Blick zu schärfen für die Beobachtung des realen Phänomens" (vgl. den Artikel in diesem Heft). Soll die Mathematik in einem Bereich angewendet werden oder mit anderen Wissenschaften kooperieren, so ist dies nur unter der Voraussetzung einer "Gleichberechtigung" möglich.

Dem korrespondiert, wie gesagt, die Tatsache, daß die einzelnen Abstraktionen oder Begriffe sich immer auf Verhältnisse und niemals auf einzelne Dinge beziehen. "Wohl kann man in der Geometrie auf einem ersten Niveau (gemeint ist die Stufentheorie von van Hiele, auf die sich Freudenthal beruft, wenn er Denken und Handeln trennt, d.V.) die Eigenschaften etwa eines gleichsei-

tigen Dreiecks oder anderer Figuren betrachten und auf einem zweiten Niveau, deren gegenseitige Beziehungen; bei den Zahlen aber bestehen offenbar die Eigenschaften gerade in den Beziehungen der Zahlen zueinander. Die Zahl 7 besäße absolut keine Eigenschaften mehr, wollte man von ihren Beziehungen zu anderen Zahlen absehen." ((16), S. 163).

Für den Zahlbegriff scheint unsere These also selbstverständlich, aber wir behaupten, sie gilt ebensogut für geometrische Begriffe (entgegen dem Zugeständnis in dem vorliegenden Zitat). Nehmen wir beispielsweise den Begriff der *geraden Linie*. Zu seiner Kenntnis ist es notwendig, daß man krumme und gerade Linien kennt, d.h. daß man bestimmte Beziehungen kennt (die beispielsweise im topologischen Denken nicht existieren); aber noch mehr: Wenn ich einem Kind eine gerade Linie vorzeichne, beispielsweise eine *horizontale gerade Linie* oder eine *vertikale gerade Linie* usf. wird das Kind dadurch nicht den Begriff der geraden Linie verstehen können. Es wird etwa glauben, *gerade Linie* meine *horizontale gerade Linie* usw. Zu prüfen wäre, ob es sich den Begriff nicht wesentlich besser aneigenen kann, wenn ich die gerade Linie als Beziehung zwischen je zwei ihrer Punkte erkläre, indem ich etwa zwischen zwei Punkten einen Faden spanne und so die gemeinte Beziehung durch eine Handlung repräsentiere. Bauersfeld verallgemeinert das und hebt ebenso die lediglich irritierende Wirkung der Anschauung hervor: "Veranschaulichungsmitteln ist gar keine Rolle zuzumessen, weil sich Begriffe nicht veranschaulichen lassen, jene Mittel daher bestenfalls Mechanisierungshilfen bieten. Arbeitsmitteln in einem engeren Sinne kommt jedoch eine Schlüsselrolle zu: Damit sind Materialien gemeint, die nicht für sich etwas darstellen ("veranschaulichen"), sondern denen erst der Umgang die wesentlichen mathematischen Aspekte verleiht (z.B. Begriffsspiel, Logische

Blöcke, Formenspiel, Registerspiel usw.). Sie werden zum Werkzeug eigener Erfahrungen und Einsichten, die ihre volle Wirkung erst im Miteinander der Kinder entfalten." ((37), S. 38)

Zwei didaktische Bemerkungen lassen sich hier anschließen: Erstens die Vermutung, daß die Tätigkeit bzw. die Entwicklung der Koordination innerhalb der Tätigkeit das kontinuierliche, durchgehende genetische Moment darstellt. Als Erläuterung dieser Hypothese könnte etwa das einfache Prinzip dienen, die Elemente einer Menge auf zwei Arten zu zählen und das Ergebnis dann gleichzusetzen. Dieses Prinzip beginnt schon, wenn ich eine Reihe Klötze von rechts nach links und von links nach rechts zähle und entdecke, daß ich jedesmal dasselbe Ergebnis bekomme; oder indem ich diese Klötze im Rechteck anordne und auf verschiedene Art und Weise zähle, um herauszufinden, daß die Gesamtzahl = Anzahl der Reihen mal Anzahl der Elemente in einer Reihe ist; oder weiter in der endlichen Kombinatorik: das immer wieder geübte Prinzip der verschiedenen Summation von Doppelsummen; oder schließlich der Satz von Fubini. Ein sehr schönes Beispiel dieser einfachen Idee findet sich auch in (13) auf S. 37.

Die zweite Bemerkung betrifft die Tatsache, daß man den Begriff auch als Beziehung und Zusammenhang von wesentlichen *und* unwesentlichen Momenten auffassen muß. D.h., daß man auch auf die unwesentlichen Aspekte explizit hinweisen und sie ausdrücklich zu den wesentlichen in Beziehung setzen muß, wenn man dem Schüler einen Begriff vermitteln möchte. Wenn ich ihnen beibringen will, muß ich durch Variationen der Zeichnung auf die unwesentlichen Momente: vertikal, horizontal usw. bzw. auf die wesentlichen Momente wie: kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten usw. gleichermaßen hinweisen.

Aufgrund des Gesagten ist es berechtigt, von einem *Widerspruch zwischen Begriff und Erscheinung* zu sprechen. Piaget hat diesen sehr schön beschrieben: "Man zeigt der Versuchsperson von Anfang an zwei Gläser, A und B., von verschiedener Form und läßt sie abwechselnd eine Perle in jedes Glas, die eine mit der rechten und die andere mit der linken Hand, hineinlegen. Bei einer kleinen Anzahl von Perlen, vier oder fünf, glaubt das Kind ohne weiteres an die Äquivalenz der beiden Haufen, was die Operation anzukündigen scheint. Sobald aber die Formen der Perlensäulen allzu verschieden werden, wird es, obwohl die Entsprechung objektiv weiter besteht, nicht sofort an die Gleichheit glauben. *Die latente Operation (Begriff) wird also von den irreführenden Wirkungen der Anschauung besiegt.* " ((30), S. 149)

2.3. Begriffliche Zusammenhaenge und die Natur von Fehlern

Differenzierung und Zusammenhang der Begriffe ist nicht gegeben, sondern ist die Aufgabe.

Auch zu dieser These zunächst einige Erläuterungen anhand von mathematischen Aufgaben.

Zwei Paar Scheitelwinkel, von denen das eine zweimal so groß wie das andere ist, werden durch zwei sich schneidende Gerade gebildet. Wie groß sind die Winkel? Manche Kinder konnten die Aufgabe nicht lösen, weil sie die Begriffe *Scheitelwinkel* und *Winkel mit gemeinsamem Scheitel* nicht voneinander trennen bzw. zueinander in Beziehung setzen konnten. Dadurch kamen sie auch nicht auf die Grundtatsache, daß die Summe aller Winkel am Kreis 360 Grad beträgt.

In der *Begleitschrift zum Koerperspiel* von Bauersfeld u.a.

findet sich sinngemäß die folgende Aufgabe: Baue aus 27 bunt eingefärbten gleichgroßen Quadern einen großen Quader, der ringsum einfarbig gelb ist. Beim ersten Versuch gab man den Kindern keinerlei Anweisungen, sondern ließ sie spontan mit den Würfeln hantieren. Die Kinder suchten sich zunächst die Klötze heraus, die vorherrschend die geforderte Farbe *gelb* besaßen, und begannen damit die unterste Schicht zu bauen. Sie gingen dabei so vor, daß in jedem Stadium die gerade entstandene geometrische Figur ringsherum einfarbig gelb war. Sie hatten dabei allerdings sehr schnell sämtliche Würfel mit auch nur einer gelben Fläche aufgebraucht. Dann setzte eine große Verwirrung ein. Beim Versuch, untere Quader auszutauschen, stürzte das Bauwerk ein. Obwohl man ihnen half, die *einzelnen Fehler* zu korrigieren, muß man sagen, daß sie sich mit ziemlichem Mißmut dieser Aufgabe widmeten. Die Situation war zu komplex und zu wenig strukturiert; es tauchten zu viele Fehler auf.

Bei einer zweiten Durchführung stellte man vor die Kinder den fertigen gelben Würfel hin und arbeitete mit ihnen zusammen die Begriffe *Kantenwuerfel*, *Eckwuerfel* und *Flaechenwuerfel* heraus, d.h. man zeigte, daß die Anzahl und die Anordnung der notwendigen gelben Flächen abhängig ist von den Beziehungen der Würfel untereinander, so wie sie sich in dem großen Würfel darstellen. Man gewann auf dieser Grundlage eine Fülle von orientierenden Beziehungen: Innenflächen, die beliebig gefärbt sein können; Außenflächen, die gelb sein müssen; kleine Quader mit drei und mehr gelben Flächen, die dennoch aufgrund der zufälligen Färbung der 27 Würfel unter Umständen nur als Flächenwürfel zu fungieren hatten; Eckwürfel, die mindestens drei gelbe Flächen haben müssen, aber auch mehr besitzen können usw. Die Aufgabe ließ sich nun, hatte man in der Tätigkeit erst einmal die 'Zelle' des Ganzen erschlossen, ziemlich mühelos bewältigen.

Der Begriff *Schwerfel* bilden heißt, wesentliche und unwesentliche Beziehungen herausheben *und* sie gegeneinanderstellen. Es ergibt sich ein Begriff, der eine größere Beweglichkeit ermöglicht als der Begriff *Wuerfel* schlechthin; immerhin *die* Beweglichkeit, die benötigt wird, eine ungelöste Aufgabe in eine gelöste zu verwandeln. Selbstverständlich stellt dieser Begriff wiederum nur eine Etappe dar, d.h. er enthält eine Fülle von Beziehungen noch beweglicherer Begriffe, beispielsweise: *gerade Linie, Winkel, Winkel mit gemeinsamem Scheitel, Punkt als Schnittpunkt von Geraden* usw.

Was hier angedeutet wird, ist, daß die Beweglichkeit (d.h. die Abstraktheit) eines Begriffs eine Funktion des Reichtums an angeeigneten Beziehungen ist und daß dieser Beziehungsreichtum seinen Ursprung im Beziehungsreichtum der Handlungen zueinander hat. Weiter löst die Differenziertheit der Koordination sowohl die Beziehungen von ihrem unmittelbaren Vollzug als Handlungen als auch von der empirischen Situation bzw. den konkreten Objekten, d.h. Interiorisierung und Formalisierung der Operationen sind korrespondierende Prozesse. Piaget sagt sehr schön, die Natur der mathematischen Intuition sei in ihrem Wesen operativ, und es liege weiterhin "in der Natur operativer Strukturen, Form und Inhalt zu dissoziieren" ((22), S.87). Diese Loslösung zielt jedoch auf Beweglichkeit und Übertragbarkeit von kognitiven Strukturen in der Objektwelt und nicht auf absolute Trennung von ihr.

Noch eine Bemerkung läßt sich hier anschließen, die uns zu dem nächsten Punkt führt: Die bisher geschilderten Aspekte des Zusammenhangs von Erkenntnis und Tätigkeit scheinen die Hypothese Piaget's nahezulegen, "daß der komplexere und weniger differenzierte Begriff der fundamentalere ist" (vgl. 31, S. 69). Diese Hypothese, die Piaget allerdings auch nicht

unter generellem Bezug geäußert hat, ist in jedem Fall viel zu einseitig. Es besteht wohl kein Zweifel, daß die Begriffsbildung bei Kindern sich ebenso vom Abstrakten zum Konkreten wie umgekehrt vollzieht.

Die von uns angeführten Beispiele machen es plausibel, daß die Beherrschung und der Gebrauch eines Begriffes darin bestehen, in jedem Augenblick die richtigen Beziehungen und Zusammenhänge zu finden und festzuhalten. Dies legt die *These* nahe, daß alle Fehler in Vereinseitigungen, in willkürlichem Festhalten irgendwelcher Zusammenhänge und Beziehungen bestehen, daß alle Fehler insbesondere Verabsolutierungen einzelner Momente des wirklichen Prozesses darstellen und nicht völlig zufällig oder unsinnig sind bzw. in keinem Zusammenhang mit der richtigen Lösung stehen.

Shulman berichtet im Sinne dieser These, daß "Piaget zum ersten Mal von den Problemen der kognitiven Entwicklung gefesselt worden ist, als er eine Serie englischer Intelligenztests ins Französische übersetzte. Es wurde durch die Beobachtung fasziniert, daß die *Fehler* der Kinder ebensoviel Interesse verdienten wie die Natur ihrer korrekten Antworten. Tatsächlich bestanden systematische interne Beziehungen zwischen den Arten der Fehler, die die Kinder der verschiedenen Altersstufen begingen. ... Diese Beobachtungen zum Charakter der kindlichen Fehler setzten eine 50 Jahre während Forschungsarbeit an den Problemen der kognitiven Entwicklung in Gang". ((40), S. 40)

Die obige These über den Charakter der Fehler macht die erstrangige Bedeutung der *Kooperation* im Lernprozeß deutlich. Erst die Kooperation stellt den Zusammenhang her zwischen gelehrtem Stoff und der Tatsache, daß seine Aneignung abhängig ist vom richtigen Verhalten. Die Kooperation allein ermöglicht die Erfahrung von einem

Begriff und seinem Gebrauch, d.h. die Erfahrung der Einheit von Wissen und Werkzeug, und sie wird damit zur wesentlichen Basis für das Finden adäquater Beziehungen. Kooperation und Kommunikation erst ermöglichen es, den jeweils objektiv wesentlichen Zusammenhang festzuhalten, d.h. geben den Begriffen gleichzeitig ihre Beweglichkeit (Allgemeinheit) und Stabilität. Dazu wiederum Piaget: "Es wäre vor allem sehr schwer einzusehen, wie die Begriffe ohne die Zusammenarbeit ihren gleichbleibenden Sinn und ihre Definition beibehalten könnten" ((30), S. 185). Dabei ist der Begriff der Kooperation im weitesten Sinne zu verstehen und meint nicht nur die unmittelbare persönliche Zusammenarbeit, wenn wir auch der Meinung sind, daß diesem letzteren Moment der Zusammenarbeit und der unmittelbaren Kommunikation im Unterricht aller Stufen wesentlich größere Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte.

Aus dem Gesagten wird weiterhin klar, daß fehlerhaftes Verhalten niemals einheitlich ist, weder in seinen Ursachen noch in seinen Ausprägungen oder Erscheinungsformen. Fehlerhaftes Verhalten ist immer eklektisch und widersprüchlich. Den Versuch, etwa Fehler der Schüler eindeutig zu benennen und ihnen mitzuteilen, korrespondiert die Methode der Selbstreflexion und die Ableitung von Unterrichtsprinzipien daraus: Wenn nämlich ein Lehrer oder ein Wissenschaftler mit dieser Methode ein gelöstes Problem analysiert, so drückt er die einzelnen produktiven Schritte des Lösungsweges zusammen zu einem kleinen Moment der plötzlichen Intuition. Dies sei der wesentliche Einfall gewesen, und alles andere stelle Routine und Vorarbeit dar. Dadurch werden jedoch Lernen, welches regellos vonstatten geht und Wissen, welches durch die Gesetze der formalen Logik geordnet wird, oder anders: Denken und Handeln, absolut getrennt.

3. *Piagets "abstraction réfléchissante"*

3.1. Einleitung.

Wir haben im letzten Abschnitt in Thesenform und anhand von Beispielen einige wichtige Probleme weitergeführt, die uns alle auf die Tätigkeit hinzuweisen scheinen bzw. auf die Notwendigkeit einer adäquaten Vorstellung vom "System der Tätigkeit" und dessen Entwicklung, d.h. vom Zusammenhang von Denken und Handeln. Erkenntnis ist aktiv, Denken ist operativ. Dies ist das Resultat auch der historischen Entwicklung der Naturwissenschaften und der Mathematik. Es bildet weiterhin die Grundlage jenes tertiums zwischen Empirismus und Nominalismus, von dem bereits die Rede gewesen ist. Piaget kommt zu diesem tertium, weil eine Rekapitulation der Wissenschaftsgeschichte offensichtlich macht, daß die Objektivität der Erkenntnis weder als Eigenschaft des Erkenntnissubjekts noch als unmittelbar im Objekt erscheinend angesehen werden kann. Daß diese Objektivität vielmehr etwas ist, was sich entwickelt, in dem Sinn, in dem Bernays gesagt hat (und Piaget schließt sich dieser Formulierung an): "Man meint vielfach, man müsse entweder eine absolute Evidenz annehmen oder das Moment der Evidenz für die Wissenschaft überhaupt preisgeben. An Stelle dieses "alles oder nichts" erscheint es sachgemäßer, daß wir uns die Auffassung von der Evidenz als etwas Erworbenem bilden. Der Mensch gewinnt Evidenzen, wie er das Gehen oder wie der Vogel das Fliegen lernt". ((4), S. 125).

Piaget macht weiterhin klar, daß man nun allerdings einer vollständigen Relativierung der Erkenntnis (Objektivitätsverlust) nur entgehen kann, wenn man den Mechanismus dieses Erwerbs von Evidenz klarlegt. ((4), S. 194)

Damit ist die Frage nach dem Zusammenhang von logisch-mathematischen Strukturen und der Erfahrung gestellt. Die skizzierten Grundprobleme der Entwicklung der Didaktik der Mathematik, - innere Entwicklungslogik der Mathematik, Bezugswissenschaften und Didaktik der Mathematik, die Beziehung zwischen Wissenschaft und pädagogischer Praxis -, können unserer Meinung nach nur angegangen werden durch eine präzisere Klärung der Frage nach dem Zusammenhang von Mathematikentwicklung und Erfahrung. Aus 2. wird plausibel, daß die theoretischen Wurzeln für die angesprochenen formalistischen Tendenzen im Mathematikunterricht und die unzureichenden Überwindungsversuche von diesem Aspekt aus erfolgversprechend erklärt und mit positivem Ertrag kritisiert werden können. Aus der bisherigen Darstellung dürfte deutlich geworden sein, daß wir Erfahrung nicht als bloß passiv aufnehmende Rezeption von Erscheinungen und Informationen verstehen. Erfahrung ist immer vermittelt durch einen Raster von mehr oder weniger impliziten theoretischen Strukturen und Konzepten, die aus einem gegebenen Stand der Entwicklung der menschlichen Erkenntnis und ihrer gesellschaftlichen Verbreitung durch Familie, Bildungsinstitutionen usw. resultieren. Erfahrung kann nur gewonnen werden in der gesellschaftlichen und natürlichen Wirklichkeit. Nur auf der Grundlage eines solchen Erfahrungsbegriffes kann überhaupt der Versuch sinnvoll erscheinen, die mathematische Theoriebildung und ihre Entwicklung mit der Erfahrung zu verbinden. Den unseres Wissens entwickeltsten Ansatz in dieser Richtung hat Piaget mit seinem Konzept der "abstraction réfléchissante" ausgearbeitet. (vgl. 4,). Wir sind daher der Meinung, daß es für eine fruchtbare grundlagentheoretische Diskussion auf unserem Gebiet notwendig ist, noch einmal in diesem Kontext die Piaget'schen Einsichten, die dieses Konzept begründen und die darin zusammengefaßt sind, zu analysieren. Wir haben an verschiedenen Stellen

die Arbeiten von Bruner und seinen Mitarbeitern herangezogen, weil sie Kritikpunkte formulieren, die uns für ein Weiterverfolgen des Piaget'schen Ansatzes bzw. auch seine Korrektur von großer Bedeutung zu sein scheinen. Es muß betont werden, daß es hier nicht um Kognitionspsychologie an sich geht, sondern um Fragestellungen, deren eine Didaktik der Mathematik sich unbedingt annehmen muß, wenn sie eine Reihe von Aufgabenstellungen, vor die sie die Praxis des Mathematikunterrichts selbst stellt, überhaupt angemessen begreifen und Lösungsvorschläge formulieren will. Wenn wir uns also im folgenden bemühen, zwei wichtige kognitionspsychologische Autoren zu analysieren und sie kritisch zueinander in Beziehung zu setzen, so tun wir das nicht als psychologische oder pädagogische Spezialisten, die wir nicht sind, sondern wir tun es als ein interdisziplinär zusammengesetztes Arbeitsteam, in dem die Mathematiker überwiegen und das sich Orientierungen gegenüber dem Problem des Mathematiklehrens und -lernens verschaffen will. Zusammengehalten und integriert wird unsere Arbeit dementsprechend durch die Entwicklung einer Auffassung von Mathematik und von ihrer Umsetzung im Bereich des Lernens, des Anwendens usw. Gleichzeitig hoffen wir dabei einen Beitrag zu leisten zur Beantwortung der Frage: Wie kann sich der Mathematiklehrer als Nicht-Spezialist dennoch wesentliche Ergebnisse von sozialwissenschaftlichen Bezugsdisziplinen aneignen? Wie wird ihm dabei seine mathematische Erfahrung helfen, bzw. wie wird umgekehrt seine Einstellung auch gegenüber mathematischer Theorie sich vertiefen? Dabei hat ein solches Unternehmen, wie gesagt, in erster Linie die Funktion, ihm eine Orientierung in seiner eigenen Praxis zu ermöglichen.

Für eine Didaktik der Mathematik besitzt das psychologische Studium des Prozesses der Entstehung und Aus-

arbeitung von mathematischen Theorien und Methoden große Bedeutung. Die Gesetzmäßigkeiten des Erwerbs von Erkenntnissen, die durch eine wissenschaftliche Disziplin erarbeitet und als Bildungsinhalt objektiviert wurden, lassen sich nur verstehen, wenn diese Erkenntnisse nicht als tote und zum Denken und Handeln der Menschen beziehungslose Resultate aufgefaßt, sondern in ihrem realen Entstehungs- und Funktionszusammenhang begriffen werden. Für den Bereich der Mathematik ist man sich aber oft nicht darüber im klaren, welchen theoretischen Schwierigkeiten sich ein solcher, für die Didaktik der Mathematik notwendiger Zugang zu dieser Disziplin gegenüber sieht. Der Piaget'sche Versuch, einen solchen Zugang zu erschließen, zeichnet sich aus durch ein ausgeprägtes Bewußtsein dieser Schwierigkeiten und der Komplexität der Aufgabe, die durch sie aufgeworfen wird.

Mathematische Aussagen lassen sich durch den Verweis auf empirische Daten ebensowenig begründen wie durch die Bezugnahme auf psychologisch begründete Denkgesetze. Sie beruhen auf Konstruktionen und sind doch nicht willkürlich, gehen aus der Aktivität des Subjekts hervor und besitzen doch intersubjektive Gültigkeit. Sie sind weder Ergebnisse von Entdeckungen noch von Erfindungen. Daher weist Piaget sowohl den empiristischen als auch den psychologistischen Versuch, Mathematik und die Theorie kognitiver Prozesse aufeinander zu beziehen, zurück. Verfehlt der eine Versuch den konstruktiven Charakter und die immanente Notwendigkeit mathematischer Aussagen, so der andere ihre Objektivität und die außerordentliche Dynamik der Theoriebildung auf dem Gebiet der Mathematik und Logik. Im Anschluß an den Nachweis des Scheiterns der traditionellen Lösungsansätze formuliert Piaget drei Kriterien für eine positive

Alternative, die unseres Erachtens auch für die Didaktik der Mathematik volle Gültigkeit besitzen: "(I) Sie (die Auffassung der Mathematik unter den oben dargestellten Gesichtspunkten, d.A.) muß der Autonomie der Mathematik gegenüber der physikalischen Erfahrung und dem psychologischen Subjekt Rechnung tragen; (II) sie muß weiter die Robustheit oder immanente Objektivität mathematischer Strukturen berücksichtigen; und (III) was die sich entwickelnde Konstruktion (im Gegensatz zu der Hypothese, daß alles im vornhinein bestimmt ist) anbetrifft, so muß sie erklären, wie diese Konstruktion in einer strengen Form begründet werden kann." ((4), S. 296).

Es ist für eine Definition des Gegenstands der Didaktik der Mathematik und die sich daraus ergebenden Probleme der Entwicklung interdisziplinärer Arbeit auf diesem Gebiet sehr aufschlußreich, daß E. Beth und J. Piaget gemeinsam zu dem Schluß kommen, daß eine fruchtbare Koordination der unterschiedlichen Gesichtspunkte der Logik und Mathematik auf der einen und der Psychologie auf der anderen Seite nur im Rahmen eines übergreifenden und beide Disziplinen aus ihrer notwendigen einzelwissenschaftlichen Verselbständigung lösenden theoretischen Konzeption möglich ist. Dieses Konzept ist für sie die genetische Erkenntnistheorie. "Dies liegt an der Tatsache, daß die epistemologische Analyse auf der einen Seite die Psychologie mit einbezieht, weil diese Analyse mit gewissen Formen des tatsächlichen Denkens befaßt ist, und auf der anderen Seite die Logik, weil diese Analyse sich auch auf die Wissenschaft als ein zusammenhängendes System bezieht" ((4), S. 305). Damit dieser Anspruch aber eingelöst werden kann, darf sich eine solche Theorie weder an das Bewußtsein als Basis aller kognitiven Prozesse

binden, noch den produktiven Charakter des Erkenntnissubjekts unterschlagen. Nur so entgeht man der falschen Alternative, Empirismus - Psychologismus, und ist dennoch nicht gezwungen, die logisch-mathematischen Strukturen als vor aller Aktivität der Menschen an sich seiende Wesenheiten an einen platonischen Ideenhimmel zu projizieren; dies scheint uns für die Frage nach den Gesetzmäßigkeiten ihrer Aneignung ein wenig ertragreiches Konzept zu sein. Beth und Piaget folgern aus dieser Einsicht die Notwendigkeit einer Unterscheidung zwischen Erkenntnissubjekt und psychologischem Subjekt: "Es gibt das psychologische Subjekt mit seinem Kern im bewußten Ich, dessen funktionale Rolle unbestreitbar ist, das aber nicht der Ursprung jeder Struktur des allgemeinen Wissens ist; aber es gibt auch das Erkenntnissubjekt oder das Subjekt, das allen Individuen auf der gleichen Entwicklungsstufe gemeinsam ist, dessen kognitive Struktur sich von den allgemeinsten Mechanismen der Koordination von Handlungen ableiten" ((4), S. 308). Für dieses Erkenntnissubjekt gilt, daß es nur in der Einheit von gegenständlicher Aktivität und Bewußtsein gefaßt werden kann. Dabei muß jenes Vorurteil überwunden werden, welches Bruner, zwischen Distanzierung und Zustimmung schwankend, so zusammengefaßt: "Es ist für den Psychologen immer schwierig, sich vorzustellen, daß etwas in einer Kultur "existiert", - oder wie immer man die Gegenwart von Eigenschaften und Fertigkeiten, die das individuelle Leben oder sogar eine Generationsspanne überschreiten, ausdrücken mag. Psychologische Theorien sind wesentlich akulturell und ahistorisch. Kroebers (1948) frühe Betonung des Überorganischen, Lévi-Straussens (1963) Betonung der Strukturen in einer Kultur und I. A. Richards (1966) kürzliche Kritik an der mangelnden Bereitschaft der strukturellen Linguisten, anzuerkennen, daß sich in der Sprache eine Geschichte

spiegelt -, alle diese Tendenzen beunruhigen einen arbeitenden Psychologen in unbestimmter Weise, und dies trotz unserer Lippenbekenntnisse zu Ideen, die sich auf Kultur und Persönlichkeit beziehen. Wir sind, Gott sei es geklagt, in der Idee befangen, daß die menschliche Wirklichkeit innerhalb der Grenzen der menschlichen Haut existiert!" (vgl. 8, S. 379, Fußnote 1).

Auf unseren Gegenstand, die Didaktik der Mathematik, zugespitzt, ergibt sich aus den Einsichten von Beth/Piaget die These: Der fruchtbarste Ausgangspunkt für eine Didaktik der Mathematik als einer Wissenschaft, die ein hohes Niveau interdisziplinärer Zusammenarbeit verlangt, ist das Studium der Grundlage der individuellen Lerngeschichte, der gegenständlichen Aktivität der Menschen. Gegenständliche Aktivität ist kein freies beliebiges Erfinden, sondern gehorcht objektiven Gesetzen, in ihr werden die Inhalte und Einstellungen des menschlichen psychischen Lebens herausgebildet und objektiviert, sie entfaltet sich auf der Basis einer organischen Grundausstattung und schließlich ist gegenständliche Aktivität der Menschen immer zugleich auch eine Produktion und Reproduktion sozialer Beziehungen. Die Relevanz der damit angesprochenen Disziplinen für eine Didaktik der Mathematik braucht nicht weiter erläutert zu werden. Das Hauptproblem ist aber nicht die Einsicht in die Notwendigkeit interdisziplinärer Kooperation oder die Frage, welche Disziplinen nun daran zu beteiligen wären, sondern das Herausfinden der fruchtbarsten Beziehungen und Vermittlungen zwischen ihnen. Hier, glauben wir, hat Piaget mit seinem genetischen und operativen Ansatz entscheidende Fortschritte gebracht, die es als dringend notwendig erscheinen lassen, diesen Ansatz in seiner Durchführung und in seinen Ergebnissen zu verfolgen, um Anhaltspunkte für die Übersetzung von Pro-

blemen des Mathematikunterrichts in theoretische Fragestellungen, ihre Auswahl und die Forschungsprioritäten des IDM zu gewinnen.

3.2. *Die Spezifik der logisch-mathematischen Erfahrung*

Im Rahmen des Versuchs einer Einschätzung der Piaget'schen Arbeiten unter dem Gesichtspunkt der Fruchtbarkeit ihrer Ergebnisse für die Mathematik-Didaktik erscheint es sinnvoll, sich unmittelbar den theoretischen Konzepten zuzuwenden, die die Genesis der Mathematik in die Kontinuität der kognitiven Entwicklung des Individuums einordnen. Das Begreifen dieser Konzepte muß hier den Ausgangspunkt bilden für eine Einschätzung seiner allgemeinen Theorie der geistigen Entwicklung und der sie tragenden Begriffe. Unter diesen Konzepten ist, wie gesagt, das wichtigste das der "abstraction réfléchissante". Um es richtig zu verstehen und nicht mit einer unmittelbaren Widerspiegelung wesentlicher Eigenschaften, die an konkretem Material dargeboten werden, zu verwechseln, [1] ist es notwendig, die Piaget'sche Unterscheidung von physikalischer Erfahrung, psychologischer Erfahrung und logisch-mathematischer Erfahrung zu explizieren.

"Es ist der wesentliche Tatbestand, daß, während physikalische Erfahrung sich auf die Objekte bezieht und das ihr entsprechende Wissen durch Abstraktion von

1) E. Wittmann scheint uns in seinem Aufsatz "Die Bedeutung der Piaget'schen abstraction réfléchissante für die Entwicklung der mathematischen Formen"(vgl. 51) diesem Mißverständnis anheimgefallen zu sein. Seine Übersetzung mit 'Abstraktion durch Rückschau' bringt den konstruktiven Charakter dieser reflektiven Abstraktion nicht zum Ausdruck. Daher werden in seiner Arbeit auch die Schwierigkeiten, die das Problem des qualitativen Unterschieds zwischen den verschiedenen Bezugsebenen stellt, nicht genügend behandelt.

den Objekten aus erwirbt, es logisch-mathematische Erfahrung mit den Aktionen selbst zu tun hat, die das Subjekt mit den Objekten ausführt" ((4), S. 232). 'Logisch-mathematische Erfahrung' ist aber, obwohl sie in den Aktionen des Subjekts ihre Grundlagen hat, genauso wenig 'psychologische Erfahrung': "logisch-mathematische Erfahrung beschäftigt sich nicht mit der Handlung als einem individuellen Prozeß, sondern mit ihren Resultaten in deren Objektivität und Notwendigkeit. Daher gibt es in solch einer Erfahrung keine Introspektion, die sich auf die subjektiven Charakteristika der Handlung, soweit sie individuelle sind, bezieht." ((4), S. 233). Ein weiterer Unterschied ist, daß für Piaget die logisch-mathematische Erfahrung im Unterschied zur psychologischen nicht alle Handlungen einschließt, sondern nur solche, die "einmal verinnerlicht ... in Operationen transformiert werden" ((4), S. 234).

Wir sind hier an einer Stelle angelangt, wo Piagets spezielle Theorie der Ausbildung logisch-mathematischer Strukturen unmittelbar auf seine allgemeine Kognitionstheorie verweist. Die Stufen der logisch-mathematischen Erfahrung, die Einschnitte und qualitativen Sprünge in der Herausbildung logisch-mathematischer Strukturen und die unterschiedlichen Niveaus, an denen die reflektive Abstraktion einsetzt, entsprechen dem Drei-Phasen-Entwicklungsmodell von Piagets genetischer Erkenntnistheorie: der Abfolge der Phase der senso-motorischen Intelligenz, der Phase der konkreten Operationen und schließlich der Phase der formalen Operationen. Ausgangspunkt für die Entstehung von Logik und Mathematik bilden die Aktionsschemata, die Piaget definiert als "die strukturierte Gruppe von verallgemeinerbaren Eigenschaften dieser Aktion, d.h. solcher, die die Wiederholung derselben Aktion oder ihre Anwendung auf einen neuen Inhalt möglich machen ((4), S. 235).

Die Möglichkeit der logisch-mathematischen Erfahrung hat in dieser Beweglichkeit der Aktionsschemata gegenüber den bestimmten Objekten, auf die sie sich jeweils richten, ihren Ursprung. Die Entwicklung der senso-motorischen Intelligenz erzwingt eine wachsende Koordinierung dieser Aktionsschemata. Im Verlauf dieser Koordination beginnen die elementarsten logisch-mathematischen Strukturen als Folge der Gruppierungen der konkreten Operationen (Klassen, Relationen, Beginn der Konstruktion der Zahl, räumliche Gruppierungen, erste Maßbegriffe) sich herauszubilden. Sie unterscheiden sich von den vorausgehenden Aktions- und Koordinationsschemata dadurch, daß sie allgemeine Beziehungen der Koordination aller möglichen Aktionen herausarbeiten oder, wie Piaget sagt, "die Charakteristika der Koordination als solcher" (vgl. 5, S. 235).

Ein analoger Prozeß auf einer höheren Abstraktionsstufe mit einer bedeutend ausgeprägteren Beweglichkeit gegenüber den Objekten vollzieht sich beim Übergang von den Gruppierungen zu den ersten reinen logisch-mathematischen Strukturen vom konkret-operativen zum hypothetisch-deduktiven Denken. Beide Übergänge werden durch die reflektive Abstraktion vollzogen. Diese hat zur Voraussetzung ihrer Wirksamkeit einen Fond von Aktionsschemata und Koordinationen, über die das Individuum in von Stufe zu Stufe wachsender Unabhängigkeit von bestimmten Objekten verfügt. Piaget schreibt dazu: "a) Um eine abstraktere und allgemeinere Struktur aus einer konkreten aufzubauen, ist es zunächst notwendig, gewisse operationale Beziehungen aus letzterer zu abstrahieren, um sie später in der abstrakten Struktur zu verallgemeinern; b) aber beides, diese Abstraktion und Generalisierung setzen die 'Widerspiegelung' (im wörtlichen Sinne) der abstrahierten Beziehungen auf einer neuen Ebene

des Denkens voraus, um so eine verallgemeinerte Antwort darzustellen; c) nun besteht diese 'Widerspiegelung' in neuen Operationen, die zu den vorherigen Operationen in Beziehung stehen, während sie sie gleichzeitig fortsetzen. So machen also die neuen Operationen, welche zur Abstraktion der vorherigen Beziehungen notwendig waren, die Neuheit des abgeleiteten Systems aus, während ihre Abstraktion von den vorherigen Operationen, die Kontinuität zwischen den beiden Systemen gewährleistet. Schließlich d) ermöglichen diese neuen Operationen die Kombination bisher getrennter Systeme zu neuen Einheiten. Wenn dies nun schon von den elementaren Stufen an zutrifft, dann gibt es keinen Grund anzunehmen, daß dieser Prozeß der Konstruktion durch reflektive Abstraktion irgendein Ende besäße. Auf der einen Seite unterliegt es keinem Zweifel, daß die Analyse der Grundannahmen eines operationalen Systems, wie elementar diese auch sein mögen, niemals erschöpft werden kann, da kein System einen absoluten Anfang besitzt. So ist es stets möglich, von einem System neue Aspekte zu abstrahieren und diese dann mit Hilfe neuer Operationen widerzuspiegeln: Dies war beispielsweise die Methode G. Cantors, als er die Implikationen der Operation der 1-1 Korrespondenz isolierte, so primitiv diese auch ist. Auf der anderen Seite kann diese reflektive Abstraktion immer das Gemeinsame zweier operativer Systeme oder ihrer austauschbaren Züge hervorbringen, um so neue Operationen, die diese Beziehungen widerspiegeln, zu konstruieren: Von der analytischen Geometrie zu den gegenwärtigen Interaktionen von Algebra und Topologie ist es eine Methode, die immer wieder benutzt werden kann. Die historische Entwicklung der Mathematik hin zu einer reinen Theorie scheint so dieser zweifachen Bewegung zuzuschreiben zu sein, diesem Prozeß der Differenzierung oder inneren Diversifikation von Systemen und ihrer externen Vereinigung. Aber was vom

psychologischen Standpunkt als wesentlich zu betonen ist, was verständlich macht, warum die reine Mathematik als eine neue Form des Denkens erscheint, die gegenüber den intuitiven Ausgangsformen eine ganz neue Richtung nimmt, ist die Tatsache, daß weder die Diversifikation noch die Vereinigung sich auf derselben Konstruktionsebene wie die Ausgangssysteme entwickeln können, die jeweils in Beziehung aufeinander differenziert und vereinigt werden müssen. Würden sich Abstraktion und Verallgemeinerung in der Art und Weise vollziehen, wie man sich das oft vorstellt, dann würde sich das Problem natürlich nicht stellen. Man faßt Abstraktionen häufig als bloßes Separieren und Verallgemeinern, als die simple Feststellung, daß gewisse Objekte einen gemeinsamen Zug besitzen " ((4), S. 242 ff). Diese (zuletzt erwähnte) Vorstellung von Abstraktion ist für die Mathematik völlig unbrauchbar; sie ist aber unserer Überzeugung nach ebenso untauglich im Bereich der übrigen Wissenschaften: Piagets *reflektive Abstraktion* richtet sich gegen eine solche Auffassung, und nur in dieser Frontstellung kann sie verstanden werden. Die Frage, die sich im Hinblick auf die 'reflektive Abstraktion' aber sofort stellt, ist die nach ihren Triebkräften: was macht der Sprung zu der neuen Abstraktionsebene möglich, und wie werden die Beziehungen der vorangegangenen Ebene auf dieser widergespiegelt?

3.3. *Triebkraefte der 'abstraction réflechissante'*

Die erste Antwort, die Piaget darauf gibt, lautet: Reflektive Abstraktion ist konstruktiv. Gegen das empiristische Mißverständnis stellt er fest: "Die Aufgabe, neues Wissen aus den eigenen Aktionen abzuleiten, besteht nicht bloß darin, daß man sich einer vorausgehenden Organisation bewußt wird, ohne sie

anders zu modifizieren als durch ihren Übergang vom Unbewußten zum Bewußten, sondern vielmehr darin, diese vorausgehende Organisation zu verallgemeinern und sie in der Form eines umfassenderen Modells von Operationen, die gleichzeitig aufgefaßt werden können, darzustellen ...." (vgl. 4, S. 237). Das reflektierende und das konstruktive Moment sind untrennbar verbunden, erst die Konstruktion neuer Operationen macht die Reflexion der vorangegangenen Aktions- bzw. Operationsstufe möglich. "Das ergibt sich aus der einfachen Tatsache, daß Abstraktion, die von Aktionen oder Operationen ausgeht, nicht bloß in der Isolierung oder der einfachen Wahrnehmung getrennter Elemente besteht, sondern notwendig eine Neukonstruktion mit Hilfe von Elementen, die von der niedrigeren zur höheren Ebene projiziert bzw. reflektiert werden, erfordert" ((4), S. 241)..

Sind hiermit in der Tat die Kriterien ausreichend formuliert, denen sich eine genetische und operative Ableitung logisch-mathematischer Strukturen aus der Erfahrung stellen muß, so ist nun die Hinwendung zur oben formulierten pädagogisch sehr bedeutsamen Frage, was nun die Triebkraft dieser zugleich konstruktiven und reflektierenden Abstraktion darstellt, möglich. Um hier weiter zu kommen, ist man gezwungen, auf die allgemeine Entwicklungskonzeption Piagets zurückzugreifen, die von den Interaktionen des Individuums mit seiner Umwelt ausgeht. Diese Interaktionen werden von dem Bestreben des Individuums, einen Gleichgewichtszustand in seinen Beziehungen zur Umwelt zu erreichen, bestimmt. Jedem Gleichgewichtszustand entsprechen bestimmte kognitive und Verhaltensstrukturen. Sie besitzen keine absolute, sondern nur eine temporäre Stabilität und sind durch qualitative Sprünge gleichzeitig miteinander verbunden und voneinander abgehoben. "Jede Struktur muß aufgefaßt werden als eine besondere,

innerhalb ihres engen Spielraumes mehr oder weniger stabile Gleichgewichtsform, die aber an den Grenzen dieses Spielraumes ihre Stabilität verliert. Und diese abgestuften Strukturen müssen ihrerseits als nach einem Entwicklungsgesetz aufeinanderfolgend aufgefaßt werden, so daß jede von ihnen den Prozessen, die bereits auf den vorigen Sutfen erschienen, ein besseres und stabileres Gleichgewicht sichert" (vgl. 30, S. 9). Der Übergang von einer Entwicklungsstufe zur anderen wird erzwungen durch temporäre Ungleichgewichte, Widersprüche zwischen den kognitiven Strukturen und dem durch die Aktivität des Individuums ermittelten Erfahrungsstand, die nur durch eine allgemeinere und besser integrierte Struktur gelöst werden können.

Die widersprüchliche Logik eines solchen Übergangs hat Piaget sehr schön an der Vorbereitung der konkreten Operationen durch das noch dem präoperationellen Entwicklungsstadium angehörende anschauliche Denken erläutert: "Ursprünglich von der unmittelbaren Beziehung zwischen der Erscheinung und dem Standpunkt des Subjekts beherrscht, entwickelt sich die Anschauung in der Richtung einer Dezentrierung. Jede übertriebene Entstellung hat ein Wiedererscheinen der vernachlässigten Beziehungen zur Folge. Jede hergestellte Beziehung begünstigt die Möglichkeit einer Umkehrung. Jeder Umweg schafft Interferenzen, welche die Gesichtspunkte bereichern. Jede Dezentrierung einer Anschauung drückt sich daher in Regulierungen aus, die in der Richtung der Reversibilität, der Komposition, der Transitivität und der Assoziativität, also der Erhaltung durch Koordinierung der Gesichtspunkte streben" (vgl. 30, S. 157). Bärbel Inhelder, eine enge Mitarbeiterin von Piaget, hat darauf in einem Memorandum, das sie für die durch Bruners Buch: 'Der Prozeß der Erziehung' für die internationale

Didaktik-Diskussion äußerst wirksam gewordene Curriculumtagung in Woods Hole verfaßt hat, für den Mathematikunterricht der Grundschule folgende Konsequenzen gezogen: "Nur eine konkrete Aktivität, die zunehmend formaler wird, führt das Kind zu jener Art geistiger Beweglichkeit, welche den der Sache nach reversiblen Operationen von Mathematik und Logik nahekommt " (vgl. 6, S. 52).

Der Weg, die konkrete Aktivität zunehmend formaler zu gestalten, führt über die Konfrontation von Handlungen und entsprechenden Erfahrungsausschnitten, die geeignet sind, sich wechselseitig zu korrigieren und die Fixierung an die unmittelbaren Handlungsresultate und Eindrücke der Anschauung zu lockern. In dem zitierten Text gibt B. Inhelder dafür eine Reihe von Beispielen.

Mit diesem Aspekt der Entwicklung eines angemessenen Beziehungsreichtums in den Aktivitäten des Individuums hängt ein anderer sehr eng zusammen, den Piaget allerdings nur höchst skizzenhaft entwickelt, der der *Kooperation*: "Die Gruppierung ist also eine Koordinierung der verschiedenen Gesichtspunkte, und d.h. eine Koordinierung zwischen verschiedenen Beobachtern und also eine Zusammenarbeit zwischen mehreren Individuen " (vgl. 30, S. 185). Beziehungsreichtum der Handlungen ist immer zugleich auch Reichtum an sozialen Beziehungen, wie sie sich auf den verschiedenen Entwicklungsstufen der Kooperation vom kindlichen Spiel bis hin zu komplexen Organisationsstrukturen hoch industrialisierter Gesellschaften entfalten. Es ist bedauerlich, daß Piaget diesen Aspekt unserer Kenntnis noch niemals systematisch entfaltet und in der von ihm selbst behaupteten untrennbaren Einheit mit der Herausbildung und Entfaltung des operativen Denkens untersucht hat. Dies bringt uns um viele wertvolle didaktische Hin-

weise. Es hat aber auch, wie wir glauben und weiter unten zu begründen versuchen, negative Folgen für Piagets Theorie selbst.

3.4. *Piagets "abstraction réfléchissante" und die Einschaetzung des Formalismus*

Wir hatten schon weiter oben die These vertreten, daß man mit dem Problem des Formalismus nicht ein für allemal fertig werden könnte, daß der Formalismus nicht ein einmal zu erledigendes Problem darstellt und darüber hinaus, daß man dann am sichersten dem Formalismus anheimfällt, wenn man ihn als ein solches ein für allemal eliminierbares Problem ansieht. Das hat seinen Grund einfach darin, daß das Formalisieren ein wesentliches Moment menschlicher Erkenntnis darstellt. Piaget sagt daher: "... insoweit die Formalisierung die verfeinerte Variante der "reflektiven Abstraktion" ist, können wir sie nicht als dem natürlichen Denken radikal fremd ansehen" ((4), S. 255).

Im Begriff der reflektiven Abstraktion wird der Abstraktionsprozeß als eine zweifache Bewegung, deren Bestandteile jeweils gegenläufig sind, festgehalten. Einmal werden die Elemente einer Struktur in ihrer Natur als Systeme, als bewegliche Gefüge von Beziehungen, entwickelt. Zum anderen werden diese operativen Beziehungen durch die intellektuelle Tätigkeit fortgesetzt und substantiviert, d.h. zu Elementen einer neuen umfassenderen Struktur vergegenständlicht. Dieser Prozeß der Substantivierung bezieht das noch Unbekannte in die Tätigkeit ein. R. Thom hat nun in ((17), S. 194-209) klargemacht, daß beide Prozesse in engem Zusammenhang gleichzeitig ablaufen bzw. vollzogen werden. Thom charakterisiert den ersten Prozeß als den des Herausbringens oder expliziten Formulierens mehr oder minder unbewußt vor-

handenen Wissens. Er nennt dies eine Distanzierung vom eigenen Gedankeninhalt und sagt, sicher ist diese Distanzierung ein notwendiger Schritt im Prozeß der mathematischen Entwicklung. Aber die inverse Operation, d.h. also die Wiederaufnahme des Expliziten in ein Implizites ist nicht weniger wichtig und notwendig. Diese zweite Stufe, die darauf hinausläuft, das technisch Gefundene als tatsächlich existent aufzufassen, es als ein legitimes Objekt zu behandeln, entspricht dem, was die Logiker 'ontologisches Erfordernis' für die in Frage stehende Operation nennen. Nun weist seiner Meinung nach alles darauf hin, daß die Operation der Distanzierung nur dann möglich ist, wenn die inverse Operation gleichzeitig vollzogen wird, wenn das durch die Operation der Vergegenständlichung hervorgebrachte Objekt als der Träger wirklicher Bedeutung aufgefaßt werden kann, eines Sinnes bzw. einer Bedeutung, die ebenso stabil und klar ist, wie die in den einfachsten Elementen. Der Prozeß der reflektiven Abstraktion ist einerseits konstruktiv-operativ (und nicht 'Abstraktion durch Rückschau') und andererseits ist er keine formal-technische Aktion auf der Grundlage empiristisch vorgefundener Begriffe bzw. Zeichen. Er entwickelt die Einheit von Reflexion und Aktion als Zusammenhang von Struktur und Funktion, von Struktur und Bewegung. Dabei soll dieser Ausdruck besagen, daß es sich hier nicht um einen formalen und vorfabrizierten Zusammenhang handelt, sondern um eine Entwicklung, die dauernd sowohl mit dem Inhalt der Erfahrung verbunden sein muß, als auch notwendigerweise in Kooperation abläuft. Wir haben den Eindruck, daß für Piaget dieser Zusammenhang im Begriff der 'Gruppierung' doch einen relativ formalen Status erlangt, weil er den Zusammenhang mit der Erfahrung vernachlässigt. Die Ursache dieser inkonsequenten Aufhebung des Formalismus scheint in Piagets

Konzept die sehr eingeschränkte Auffassung zu sein, die er von der Natur des Implizitmachens hat: Bei ihm bezieht es sich genetisch nur auf die jeweils vorausgegangene Abstraktionsstufe. Das ist aber bei weitem keine ausreichende Basis für die konstruktive Einordnung des Formalismus.[1] Piaget weist der Logik und Mathematik nicht die Aufgabe zu, durch konstruktive Abstraktion der Orientierung in der Wirklichkeit zu dienen, sondern sie vielmehr im Hinblick auf einen idealen Gleichgewichtszustand zu übersteigen: "Da das Gleichgewicht in der Wirklichkeit niemals vollständig erreicht wird, so bleibt außerdem die ideale Form zu betrachten, die es hätte, wenn es sich verwirklichen ließe. Dieses ideale Gleichgewicht wird von der Logik axiomatisch beschrieben. Der Logiker operiert also im ideellen Bereich (im Gegensatz zur Wirklichkeit) und er hat auch das Recht, auf diesem Gebiet zu bleiben, da er sich mit einen Gleichgewicht beschäftigt, das niemals vollständig verwirklicht wird und das in dem Maße, wie immer neue gedankliche Konstruktionen realisiert werden, noch weiter und noch höher hinauf projiziert wird " ((30), S. 187).

Wir hatten an der Aufgabe des Würfelspiels zu skizzieren versucht, wie die Beweglichkeit (Abstraktheit) der Begriffe vom Komplexen (Undifferenzierten) zum Differenzierten hin zunimmt; d.h., wie die Begriffsentwicklung im Abstraktionsprozeß ein Weg zur Wirklichkeit hin, und nicht von ihr weg ist. Dies scheint auch A.N. Whitehead im Auge zu haben, wenn er sagt: "So stehen wir oft mitten in der Theorie den praktischen Anwendungen am nächsten, was nur scheinbar paradox ist " ((47), S. 57). Indem also die mathematische Tätigkeit abstrakter wird, wird sie zugleich gegenständlicher, d.h. mit mehr Gegen-

1) vgl. dazu auch Thom in ((22), S. 200)

ständen der Erfahrung verknüpft. Allerdings ist dies kein Automatismus, sondern eher eine Aufforderung, die Mathematik und ihren Formalismus richtig einzuordnen, denn, wie Freudenthal sagt, "man kann die mathematischen Probleme nur in der realen Welt verstehen" (14). Wie schwer diese Möglichkeiten zu nutzen sind, kann man in der Auseinandersetzung um die sogenannte 'moderne' Mathematik in der Schule verfolgen.

3.5. *"abstraction réfléchissante" und die Totalitaet der gesellschaftlichen Aktivitaet*

Die konstatierten Mängel in der Kritik des Formalismus haben unseres Erachtens einen gemeinsamen theoretischen Ursprung in bestimmten Zügen von Piagets allgemeiner genetischer Erkenntnistheorie. Dabei denken wir weder an Piagets Betonung des operativen Moments in den kognitiven Prozessen, noch an die Herleitung von Logik und Mathematik aus einer immanenten Logik der Aktionen. Problematisch scheint uns vielmehr die These zu sein, in den individuellen Interaktionen mit der Umwelt für sich genommen gebe es so etwas wie "allgemeine Aktionen des Subjekts, unabhängig von den spezifisch physikalischen Objekten und den subjektiven Charakteristika der Aktionen der Individuen" ((4), S. 244). Von diesen allgemeinen Aktionen, die für sich die Basis der logisch-mathematischen Abstraktionen darstellen, stellt er zwar fest, daß sie "aufgrund einer unvermeidlichen Zirkularität zugleich kollektiv und individuell" ((4), S. 245) sind, bleibt aber bei dieser Feststellung stehen, ohne die Frage nach einem inneren Zusammenhang beider Aspekte, der zugleich Unterschied und Beziehungen einschließen würde, zu verfolgen.

Es resultiert daraus zunächst einmal eine gewisse Beliebigkeit in der Auswahl des jeweiligen Aspekts: "Da menschliche Handlungen jedoch nahezu immer sowohl kollektiv als auch individuell sind, lassen sich die Gesetze, die ihre allgemeine Koordination beherrschen, ebensogut auf interindividuelle Beziehungen wie auf private und insbesondere internalisierte Handlungen anwenden " ((34), S. 141). Es ergibt sich daraus weiterhin die Überzeugung, die 'allgemeinen Koordinationen' und die auf ihnen aufbauenden logisch-mathematischen Strukturen ergäben sich aus den organischen Grundlagen der menschlichen Aktivität. "Unsere Hypothese ist es, daß es elementare Strukturen gibt, die allen lebenden Individuen gemeinsam sind, und daß die Schaffung von Formen durch die Intelligenz die organische Morphogenese verlängert " ((4), S. 298).

Damit hängt es auch wohl zusammen, daß Piaget die Mathematik von der Objektwelt streng getrennt wissen will, und ihre Reintegration in diese über die Vielfalt der Anwendungen in Technik, Organisation und empirischen Wissenschaften nicht für eine innere Entwicklungspotenz der Mathematik selbst hält: "Im Verlaufe der weiteren Entwicklung werden fortlaufend neue Operationen konstruiert, jeweils von den vorhergehenden ihren Ausgangspunkt nehmend, die gleichfalls sich auf keinerlei Elemente außerhalb der operationalen Strukturen selbst beziehen. ... Die Geschichte der Mathematik kennt, beginnend mit dem Infinitesimal-Kalkül, einen Überfluß an Beispielen von Entdeckungen, die physikalische Probleme nahegelegt haben. Aber es ist eine Sache, ein Konzept von Objekten abzuleiten, indem man von der physikalischen Erfahrung aus abstrahiert, und eine andere, von einem Problem stimuliert zu sein " ((4), S. 244).

Durch dieses Statement sind wiederum eine Reihe von didaktisch bedeutsamen Fragestellungen beiseite geschoben und als irrelevant gekennzeichnet worden, ohne daß die Unterscheidung zwischen stimulierendem Problem und operativer Basis, auf der die reflektierende Abstraktion aufbaut, den von ihm selbst vorgebrachten Einwand vollständig ausräumt. Die Frage bleibt schließlich, was solchen Problemen ihre stimulierende Wirkung für die Fortbildung der Mathematik gibt. Das Erschließen der mathematischen Bedeutung, dem R. Thom, wie wir meinen zu Recht, soviel Wert für den Mathematikunterricht beimißt, berührt unmittelbar diese Frage.

Piaget läßt ziemlich deutlich mehrere Motive erkennen, die ihn zu dieser Trennung von Mathematikentwicklung und der Geschichte ihrer Anwendungen in anderen Wissenschaften und gesellschaftlichen Bereichen bewogen haben. Er scheint einmal der Meinung zu sein, daß diese Trennung die logische Konsequenz seiner anti-empiristischen Position ist, daß die Universalität mathematischer Aussagen nur so begründet werden kann. Dabei scheint er uns aber dem Empirismus noch zuviel Ehre zu geben, denn dieser ist als Erkenntnistheorie nicht nur für die Mathematik ungeeignet, sondern auch für die sogenannten empirischen Wissenschaften, denn auch in diesen ist Wissen und Aktion zu einer Einheit verschmolzen. Nicht umsonst beginnt die Geschichte der neuzeitlichen Wissenschaften mit der Ausarbeitung der Theorie des Experiments durch Galilei.

Piaget dagegen meint: "Wenn wir auf ein Objekt einwirken, hat unsere Erkenntnis ihren Ursprung im Objekt selbst. Dies ist der allgemeine Gesichtspunkt des Empirismus, der im Falle experimenteller oder empirischer Erkenntnis im großen und ganzen richtig ist " ((31), S. 23). Die unvermittelte Trennung: hier

Objekt als Ausgangspunkt der Abstraktionen der empirischen Wissenschaften - dort Aktionen des Subjekts als Ausgangspunkt der Abstraktionen von Logik und Mathematik, zerschneidet genau das, was Piaget für den Vorzug des operativen Ansatzes hält, die Einheit von Subjekt und Objekt in der gegenständlichen Tätigkeit. Diese Trennung macht es schwer verständlich, wieso beide Klassen von Wissenschaften sich so intensiv wechselseitig befruchten können und in der Lage sind, ihre unterschiedlichen Erkenntnisse jeweils in die eigene theoretische Perspektive zu übersetzen.

Ein zweites Motiv für Piagets Haltung zu dieser Frage scheint seine Furcht zu sein, die Einbeziehung der gesellschaftlichen Anwendungen von Mathematik in die Theorie ihrer Entwicklung führe zu einer Aufgabe ihrer Objektivität und Autonomie. "Aber weder diese Zirkularität (von Individuellem und Kollektivem, die Verfasser), noch die gemischte Natur der Operationen, die in irgendeinem spezialisierten Verstand stattfinden, vermindern die Autonomie der operativen Entwicklung, denn weder die öffentliche Meinung noch das introspektive Bewußtsein erklären, warum die Individuen anerkennen, daß 2 + 2 = 4 oder daß A = C, wenn A = B und B = C ist, da diese Wahrheiten von Gesetzen der Koordination von Aktionen abhängen, seien diese Aktionen nun kollektiv oder individuell " ((4), S. 245). Piaget scheint hier von einem Gegensatz von Gesellschaftlichem und gegenständlich Objektivem auszugehen. Die weiter oben konstatierten Lücken in der Darstellung der Einheit von Kooperation und Genesis der Operationen machen sich hier bemerkbar.

"Das Gleichgewicht muß in Wahrheit als ein vierter Faktor neben den drei genannten (Reifung, physisches

und soziales Milieu) betrachtet werden. Er tritt freilich nicht additiv auf, da er als notwendige Koordination zwischen den elementaren Faktoren wirkt, von denen keiner isolierbar ist. Nichtsdestoweniger stellt er einen vierten Faktor dar, zunächst, weil er allgemeiner ist als die drei ersten und dann, weil er auf eine relativ selbständige Weise analysiert werden kann " ((33), S. 284; vgl. dazu auch (4), S. 297). Es ist fragwürdig, ob in der Analyse des Verhältnisses zwischen individuellen kognitiven Strukturen und den sozialen Beziehungen wirklich die Piaget'sche Kategorie des Gleichgewichts weiterhilft, die inhaltsleerer ist als die Kategorien, die sie miteinander verbinden soll, und gar nicht spezifisch für deren Wechselbeziehungen. Von Gleichgewicht kann genausogut bei biologischen Verhältnissen gesprochen werden, die den 'Faktor soziales Milieu' nicht aufweisen.

Wie Bruner unseres Erachtens richtig hervorhebt, sind Reifungsvorstellungen und sozialer Charakter von Lernen und Wissen unvereinbar. Solche Vorstellungen führen tendenziell zu einem übergroßen Vertrauen in die Spontaneität der kognitiven Entwicklung, das der vollen Ausschöpfung der Lernpotenzen hinderlich werden kann. [1] Diese im Kern biologistische Position Piagets ist aber keine Schlußfolgerung aus seinem operativen Ansatz.

1) Eine differenzierte Zusammenfassung der Position Piagets in dieser Frage gibt Shulman:"Um zu entscheiden, ob ein Kind in der Lage ist, einen bestimmten Begriff oder ein bestimmtes Prinzip zu lernen, analysiert man die Struktur des zu lehrenden Gegenstandes und vergleicht sie mit dem, was bisher über die kognitive Struktur der Kinder des entsprechenden Alters bekannt ist. Wenn beide Strukturen zusammen stimmen, kann der neue Begriff oder das neue Prinzip gelehrt werden; wenn das nicht der Fall ist, kann er nicht gelehrt werden. Man muß im letzteren Fall, wenn die Dissonanz wirklich substanziell ist, eine weitere Reifung abwarten. Wenn der Grad des Auseinanderklaffens nur minimal ist, dann scheint nichts in Piaget's

Die unvermittelte Trennung von sozialem und physischem Milieu, wie überhaupt die Verwendung des Terminus 'soziales Milieu' verweisen darauf, daß Piaget ein zentrales Moment der gegenständlichen Tätigkeit des Menschen nicht im Blick hat: Das *soziale Milieu* ist Natur und zugleich gesellschaftliches Produkt ebenso wie die Natur, mit der sich der Mensch auseinandersetzen muß, in immer höherem Ausmaß durch die Spuren der gesellschaftlichen Aktivität geprägt ist. Die Gesellschaft ist kein "soziales Milieu", gewissermaßen ein Umfeld für die natürliche und spontane Entwicklung des Individuums, die lediglich gehemmt oder gefördert werden kann. Die zur vollen Entfaltung der gegenständlichen Tätigkeit notwendigen Bedingungen und Mittel sind gesellschaftliche Produkte und nicht von isolierten Individuen hervorgebracht. Daß eine bedeutsame Beziehung zwischen kindlicher Aktivität (Spiel etc.), dem Niveau der Mittel, über die eine Gesellschaft zur Bewältigung der Aufgaben der Produktion, der Kommunikation und des Kenntniserwerbs verfügt, und der kognitiven Entwicklung bestehen könnte, scheint Piaget nicht als Möglichkeit in seine Überlegungen einzubeziehen. Ohne daß wir hier schon die Qualität der Argumente, die er für seine These von der sekundären Rolle der Sprache in der kognitiven Entwicklung anführt, prüfen könnten, drängt sich doch ein logischer Zusammenhang dieser These mit der Vernachlässigung des sozialen Charakters der gegenständlichen Beziehungen der Menschen auf.

(Fortsetzung der Fußnote) allgemeiner Entwicklungstheorie auszuschließen, daß ein bestimmtes Vorbereitungstraining erfolgreich durchgeführt werden könne. Jedoch scheint Piaget selbst unter diesen Voraussetzungen immer eine 'Wartestrategie' einer 'Trainingsstrategie' vorzuziehen. Obwohl seine Theorie sowohl externe als auch interne Triebkräfte der Entwicklung kennt, scheint er doch auf die internen und ontogenetischen Mechanismen größeren Nachdruck zu legen." Es ist klar, daß daraus auch folgt, daß die Schule zumindest bis zum Stadium der formalen Operationen eigentlich keine prägende Kraft für die geistige Entwicklung des Kindes besitzt (vgl.(40), S. 42/43).

4. Bruner's Piaget-Kritik

4.1. Die Bedeutung von kulturellen Technologien

Es ist eine unfreiwillige Ironie, wenn Bruner, der Piagets operativen Standpunkt nur eingeschränkt gelten lassen will, gegen diesen, der meint, ihn uneingeschränkt zu vertreten, eben dieses neue Phänomen, die zentrale Bedeutung der gegenständlichen Mittel der Auseinandersetzung des Menschen mit der Natur, vorbringt und zwar in so einleuchtenden Formulierungen, daß sie hier ungekürzt zitiert werden sollen: "Als im Jahre 1959 die hunderste Wiederkehr der Veröffentlichung von Darwins 'The Origin of Species' gefeiert wurde, legten Washburn und Howell in Chicago eine Arbeit vor, die die folgende Stelle enthielt (S. 49 f): *'Es scheint heute, dass die bedeutende Groesse des Gehirns gewisser Hominiden eine relativ spaete Entwicklung darstellt und dass sich das Gehirn im Gefolge eines Selektionsdruckes nach der Aufrichtung und dem Gebrauch von Werkzeugen entwickelte. Das Leben auf dem Boden und die Nahrungssuche durch die Jagd schufen das grosse menschliche Gehirn, eher als dass der Mensch mit einem grossen Gehirn diese neuen Lebensformen entdeckt haette. Diese Schlussfolgerung ist das wichtigste Ergebnis der neueren Funde von hominiden Fossilien. Diese haben weitreichende Implikationen fuer die Bedeutung des menschlichen Verhaltens und seines Ursprungs. ... Der wichtigste Punkt ist die Tatsache, dass die Groesse des Gehirns, insofern sie aus dem Schaedelinhalt erschlossen werden kann, nach dem Gebrauch und der Herstellung von Hilfsmitteln etwa um das Dreifache zugenommen hat. ... Die Einmaligkeit des Menschen muss als Ergebnis des technisch-sozialen Lebens angesehen werden, da es die Groesse seines Gehirns verdreifachte, sein Gesicht verkleinerte und viele andere Strukturen seines Koerpers veraenderte.'* Diese Aussagen bedeuten, daß die tatsächliche Veränderung des Menschen während einer langen Zeit (wahrscheinlich etwa 500 000 Jahre) alloplastisch eher als autoplastisch gewesen ist. D.h.: Er hat sich durch die Verbindung mit neuen äußeren Systemen

von Hilfsmitteln eher als durch irgendeine auffällige Veränderung seiner Morphologie entwickelt - 'prothetische Evolution', wie Weston La Barre es nennt. Die Hilfsmittelsysteme scheinen drei allgemeinen Typen anzugehören:"1. *Verstaerker der menschlichen motorischen Faehigkeit.* Sie reichen vom schneidenden Instrument über den Hebel und das Rad zu einer Vielfalt moderner Hilfsmittel. 2. *Verstaerker einer sensorischen Faehigkeit.* Sie umfassen einfache Mittel. wie z.B. Rauchsignale, und moderne, wie die Verstärker und die Radargeräte. Sie schließen auch gewisse Arten der 'software' ein, wie etwa die auf Übereinkunft beruhenden perzeptiven Abkürzungen, die man auf sensorische Umweltzüge anwenden kann. 3. *Verstaerker der menschlichen schlussfolgernden Faehigkeit.* Es handelt sich hier um eine unendliche Vielfalt, die von der Sprache zu den Mythen und Theorien und Erklärungen reicht." ((8), S. 83)

Die Einheit von Entfaltung der intellektuellen Fähigkeit des Individuums und Entwicklung des gesellschaftlichen Erkenntnisprozesses in der Geschichte rückt damit sehr viel stärker in den Brennpunkt der Aufmerksamkeit, als das bei Piaget der Fall sein konnte. Aufgrund dieser Einsichten kritisiert Bruner, daß bei Zugrundelegung des Gleichgewichtskonzepts die kognitive Entwicklung innerhalb der einzelnen Piaget'schen Stufen und vor allen Dingen nach Abschluß der stufenartigen Entwicklung nicht mehr entwicklungstheoretisch zu verstehen ist. "Wir haben in der Vergangenheit den Begriff des Ungleichgewichts in diesem Gebrauch kritisiert, sowohl wegen seines Mangels an Spezifität als auch wegen der Zirkularität der Vorhersagen über Entwicklung; ..." ((8), S. 25).

Für die Charakterisierung des Gesamtprozesses der kognitiven Entwicklung setzt sich Bruner ausdrücklich von Piagets Vorstellung einer spontanen, sich aus den Interaktionen zwischen Individuum und Umwelt ergebenden gei-

stigen Entwicklung ab. "Im Genfer Institut wird die kognitive Entwicklung fast ausschließlich als Prozeß der Reifung verstanden, einer Reifung, die dadurch geschieht, daß logische Strukturen verinnerlicht werden; diese verwirklichen sich zuerst in motorischen Verhaltensweisen, die sich sodann schrittweise verinnerlichen, bis sie symbolisch verwendet werden können. ... Am Zentrum für kognitive Studien der Harvard-Universität wird kognitive Entwicklung eher als eine Verinnerlichung von kulturellen Technologien verstanden, wobei die Sprache die effizienteste vorhandene Technologie darstellt." ((8), S. 257)

Bruner zeigt diese Besonderheit des menschlichen Lernprozesses am kindlichen Spiel im Unterschied zu dem Spiel von Pavian-Jugendlichen. "Bei den Menschen der Jäger- und Sammlergruppe auf der anderen Seite gibt es eine *bestaendige* Interaktion zwischen Erwachsenen und Kindern, Erwachsenen und Jugendlichen, Jugendlichen und Kindern. ... Kinder spielen ständig nebenher imitierend Rituale nach, wie sie auch den Gebrauch von Werkzeugen und Waffen der Erwachsenenwelt nachahmen." ((7), S. 29/30)

Der Unterschied zwischen tierischer und menschlicher Informationsübertragung und damit der anthropologische Hintergrund des wachsenden Gewichts von Bildungsprozessen in der Geschichte der menschlichen Gesellschaft werden von Bruner im Gegensatz zu Piaget sehr deutlich herausgearbeitet. "Ob diese Rekonstruktion der Ursprünge richtig ist oder nicht, das Ergebnis des Prozesses brachte eine Spezies hervor, deren Verhalten weniger durch eingebaute Determination als durch Lernfähigkeit und die Erschließung äußerer Quellen für Fähgikeiten und Wissen bestimmt ist. Ermöglicht wurde das alles durch die Fähigkeit zu symbolischem Handeln. Nun beginnt eine neue Phase der organischen Evolution, bei der die Pädagogik in demselben Maße eine immer größere Bedeutung erlangt, wie der DNA-Code in der Spezifität seiner Instruktionen abnimmt." ((7), S. 161)

Der zentrale Stellenwert von Schule für die Gestaltung kognitiver Prozesse wird von Bruner auf der Basis vergleichender empirischer Studien einleuchtend demonstriert, und er kommt zu dem Schluß: "Es ist kein Wunder, daß in jüngster Zeit viele Studien große Unterschiede zwischen 'primitiven' Kindern, die in Schulen gingen, und ihren Brüdern, die nicht in Schulen gingen, herausstellten: Unterschiede in der Wahrnehmungs- und Abstraktionsfähigkeit, der Zeitperspektive usw...." ((7), S. 31).

Und wenn Anhänger Piagets folgendes Prinzip vertreten: "Stattdessen schlage ich vor, die sich spontan entwickelnde Intelligenz des Kindes zum Zentrum der Bemühungen in der Grundschule zu machen und alles weitere dieser Priorität unterzuordnen." ((7), S. 12), so entspricht es andererseits den einleitend dargestellten theoretischen Gründen, daß ausgerechnet Bruner, dem im Zusammenhang der Debatte um 'discovery learning' ein Verherrlichen der Spontaneität vorgeworfen wird, in seinen Vorschlägen zur Curriculumreform eine durchaus anti-spontaneistische Haltung einnimmt und von der sozialen Prägung des Lernprozesses ausgeht.

4.2. Bruner's Auffassung von der Rolle der Sprache

Die herausragende Bedeutung der gegenständlichen Mittel der menschlichen Tätigkeit für die Überlieferung der sozial-historischen Erfahrung der Menschen wird bei Bruner vor allem an der Rolle der Sprache entwickelt. Dies ist auch sehr verständlich, da sich das gesellschaftliche Moment in der Entwicklung der Intelligenz in ganz eminentem Maße über die Sprache realisiert.

Im Gegensatz zu dieser These mißt Piaget der Sprache keine entscheidende Rolle bei der Entwicklung der Denk-

fähigkeit zu. In Polemik mit den logischen Neopositivisten, die logisch-mathematische Strukturen ausschließlich von sprachlichen Formen ableiten, kehrt Piaget in *Einfuehrung in die genetische Erkenntnistheorie* diese Argumentation um und erklärt Sprache zum Produkt logisch-mathematischer Strukturen und der Operationen, die zur Bildung dieser Strukturen führen.

Als Beweis führt er an, daß im Verlauf der intellektuellen Entwicklung jedes Individuums logisch-mathematische Strukturen bereits vor dem Auftreten von Sprache vorhanden sind. "Sprache erscheint in der Regel um die Mitte des zweiten Lebensjahres, aber schon vorher, gegen Ende des ersten oder Anfang des zweiten Lebensjahres gibt es eine sensomotorische Intelligenz, eine praktische Intelligenz, die ihre eigene Logik hat - eine Logik der Aktion." ((31), S. 50). Weiter verweist er auf Experimente von Furth mit Taubstummen und auf Versuche von H. Sinclair, die zeigen sollen, daß Sprachunterricht nicht den Erwerb logischer Strukturen beschleunigt.

Dagegen läßt sich einwenden, daß das Vorhandensein der sensomotorischen Intelligenz vor dem Vorhandensein der Sprache zwar die logischen Neopositivisten widerlegt, aber nicht bestätigt, daß Sprache in der Intelligenzentwicklung keine Rolle spiele. Auch die angesprochenen Versuche von Furth ergeben nur, daß Taubstumme zu vergleichsweise elementaren Intelligenzleistungen fähig sind. Wird die Beherrschung höherer Abstraktionen gefordert, so versagen Taubstumme, wie in ((27), S. 54) ausgeführt ist.

Dies stimmt auch genau mit Bruners Zusammenfassung der Untersuchungen zur sogenannten Sapir-Whorf Hypothese zusammen. Danach bezieht sich die von Whorf behauptete Abhängigkeit der Denkstrukturen von der Sprachstruktur nicht so sehr auf isolierte Worte, sondern auf komplexere sprach-

liche Beziehungen: "Die Übereinstimmung bezieht sich nicht auf isolierte Wörter, sondern auf die Tiefe ihrer hierarchischen Einbettung in der Sprache wie auch im Denken." ((7), S. 71)

Die Piaget'sche Deutung der Versuche von Sinclair und Furth resultiert einmal daraus, daß er nicht genügend die Komplexität des möglichen Einflusses der Sprache auf das Denken in Rechnung stellt, darüber hinaus rührt sie aber wohl vor allem daher, daß er Sprache im wesentlichen als soziale Konvention ansieht und sie folglich aufgrund seiner Auffassung des Sozialen in Gegensatz zur Gegenständlichkeit und immanenten Notwendigkeit des operativen Ursprungs der kognitiven Strukturen bringen muß. Gleichzeitig notiert er aber die Notwendigkeit, die Herleitung der Sprache aus seinem operativen Ansatz heraus durchzuführen:"... die allgemeine Koordination der Handlungen als den Start der logisch-mathematischen Strukturen einzuführen, bildet die Garantie einer Autonomie, die nicht mehr und nicht weniger zuverlässig ist als ein Rückbezug auf sprachliche Syntax und Semantik. Auf der anderen Seite ergibt das einen tieferen Ursprung, aus dem sich die sprachlichen Koordinationen selbst ableiten ((4), S. 296). So lange man aber nicht den gesellschaftlichen Charakter der gegenständlichen Tätigkeit in den Mittelpunkt der Sprachanalyse stellt, bleibt dies ein bloßes Postulat.

Bruners Reflexion geht auch hier einen Schritt über Piaget hinaus: "Es scheint jedoch wahrscheinlich, daß die Fähigkeit, welche die Entwicklung der Sprache ermöglichte, jenes abstrahierende, regelproduzierende Geschenk, auch etwas mit der programmatischen Natur der Werkzeugbenutzung und mit ihren Regeln der Substantion zu tun hat." ((7), S. 27). In den *Studien zur kognitiven Entwicklung* finden sich Untersuchungsergebnisse, die besagen, daß bei Aufgaben zur Frage der Invarianz, die sich an den Piaget'schen

Vorbildern orientierten, die signifikant besten Ergebnisse beim Zusammentreffen von manipulativem Umgang mit dem benutzten Material und der Verbalisierung erzielt wurden. (vgl. (8), Kap. X)

Dennoch bleibt Bruner so sehr einer rein strukturellen Auffassung der Sprache verhaftet, daß er den Zusammenhang von sprachlicher Tätigkeit und den übrigen gegenständlichen Tätigkeiten nicht als dringendes Forschungsproblem ansieht und der angedeuteten Frage nicht weiter nachgeht. Statt Piagets operativen Ansatz auch hier kritisch weiter zu verfolgen, glaubt er, ihn teilweise verlassen und durch die Annahme von ererbten kognitiven bzw. sprachlichen Strukturen ersetzen zu müssen. Der damit in Kauf genommene Eklektizismus scheint uns aber keine befriedigende Lösung zu sein. [1)]

1) Zur systematischen Darstellung und Einschätzung der Bruner'schen Arbeiten vergleiche weiter die Rezension in diesem Heft.

5. *Einige vorlaeufige Hypothesen*

5.1. *Sprache*

Aus der Piaget'schen Einschätzung der Rolle der Sprache sind eine Reihe didaktischer Konsequenzen gezogen worden. Diese laufen im allgemeinen darauf hinaus, daß man, um das vorzeitige Formulieren schematischer Regeln zu vermeiden, die Entwicklung der Problemlösefähigkeit unbedingt in den Vordergrund rückt und nicht bemerkt, daß diese Fähigkeit nicht unabhängig von Abstraktions- und Verallgemeinerungsfähigkeit entwickelbar ist. Anders können wir auch die folgende Aussage nicht verstehen: "Auf eine Verbalisierung der Erkenntnisse sollte bei Vor- und Grundschulkindern im Anfang verzichtet werden." ((2), S. 10)

Andere Autoren schreiben hingegen dem Aufbau eines verbalen Modells beim Lösen arithmetischer Aufgaben, das dann zur Konstruktion grafischer Schemata führt, eine sehr wirksame Rolle zu.

Generell ist Sprache in vielerlei Hinsicht für den Mathematikunterricht bedeutsam und stellt demgemäß für die Didaktik der Mathematik ein zentrales Problem dar. Dieses Problem erscheint in einer Fülle von Aspekten des Mathematikunterrichts: Zusammenhang von Sprache und Tätigkeit, die Rolle der Sprache bei der Herausbildung von Verallgemeinerung und Abstraktionen, die Funktion der Sprache bei der Darstellung und Entwicklung der Bedeutungen mathematischer Begriffe, der Zusammenhang von Sprache und Formalisierung.

Um die großen Errungenschaften der Piaget'schen Theorie für die Didaktik der Mathematik nutzen zu können und doch den Blick für die wichtigen Fragestellungen, die bei

Piaget ausgespart sind, zu erhalten, liegt es nahe, den Versuch zu unternehmen, Sprache selbst als Teil der gegenständlichen Tätigkeit zu betrachten und in dieser theoretischen Perspektive zu erforschen.

Tätigkeit des Menschen und Sprache im Zusammenhang zu sehen, hat in der linguistischen Wissenschaft bereits eine gewisse Tradition, und gerade in den letzten Jahren findet in dieser Richtung eine sehr lebhafte Forschung statt, die in der Linguistik als Theorie der Sprechhandlungen bezeichnet wird (s. (54), (55)). In dieselbe Richtung weisen auch Beiträge aus der Sowjetunion (s. (25)), die in ihrer Konzeption auf die Theorie des 1934 verstorbenen Psychologen Wygotski (s. (56)) zurückgehen.

Im folgenden wollen wir zur Einheit von gegenständlicher Tätigkeit und Sprache einige sehr allgemeine und hypothetische Überlegungen anstellen, die zu überprüfen wären und Richtungen der weiteren Arbeit an diesem zentralen Problem unter den Gesichtspunkten unseres Gegenstandes angeben könnten.

Im Unterschied zur Auffassung Bruners, der den operativen Standpunkt Piagets verläßt, weil er mit dessen Position zur Sprache nicht einverstanden ist, ist es eine durchaus plausible Alternative, den operativen Ansatz auch auf die Sprache auszudehnen. Vor allem wird durch einen solchen Ansatz der Einsicht Rechnung getragen, daß das Auftreten der Sprache das Gesamtsystem der gegenständlichen Tätigkeit *verändert* und nicht nur sozusagen begleitet. Gerade hier ist ein Punkt der Kritik an Piaget festzumachen.

Es ergibt sich hieraus auch eine veränderte Auffassung des Denkens, die nicht mehr an die Alternative, entweder mathematisch-logische Strukturen aus der Sprache oder

aber die Sprache aus mathematisch-logischen Strukturen erklären zu müssen, fixiert ist. Sieht man nämlich, daß Denken sich nicht nur im Sprechen, sondern auch in jeder planvollen Aktivität äußert, dann wird klar, daß eine fruchtbarere Frage als die nach dem Verhältnis von Denken und Sprechen diejenige nach dem Verhältnis des Sprechens zum gesamten Inhalt der Tätigkeit ist.

Über einen solchen Ansatz findet man auch einen besseren Zugang zu einem für die Didaktik der Mathematik unmittelbar wichtigen Problem der Sprachtheorie: Die Tatsache, daß ein Kind im Alter von drei Jahren relativ plötzlich über eine syntaktisch und grammatisch hoch organisierte Sprache verfügt, obwohl sein Erfahrungssystem nicht im selben Maße organisiert ist, führt Chomsky und u.a. auch Bruner zu der Annahme, sprachliche Strukturen seien angeboren. Genauso läßt sich aber annehmen und für unsere Fragestellung ist dies vermutlich produktiver, daß Sprache vom Kind zunächst in gewissen instrumentellen und operativen Aspekten angeeignet wird, ohne daß die äußerst voraussetzungsvollen Errungenschaften der gesellschaftlichen Entwicklung, die die Herausbildung der Sprache tragen, damit bereits in vollem Umfang vom Kind erworben worden sind.[1] Die weitere Aneignung des in der Sprache verkörperten Erfahrungssystems vollzieht sich (ganz global) so, daß das Kind durch Ausdehnung des Bereichs seiner Tätigkeit und Aneignung neuer (gesellschaftlicher) Tätigkeitsformen die Bedeutung der Sprache nach und nach ausschöpft. Die Bedeutung von Forschungen, die sich auf die Beziehung zwischen Sprechtätigkeit und Inhalt der Tätigkeitsformen konzentrierten, liegt für die Didaktik darin, daß sie wertvolle Hinweise geben könnten, wie die Aneignung des begrifflichen Inhalts eines mathematischen Formalismus sich vollzieht.

1) Damit soll nicht behauptet werden, daß beide Ansätze an sich inkompatibel seien. Die Differenz zwischen beiden Ansätzen zeigt sich unmittelbar wohl vor allen Dingen in den Forschungsstrategien und -prioritäten.

Von Wygotski stammt die Charakterisierung der Spezifik der Sprache unter allen Tätigkeitsarten als *Einheit von Kommunikation und Generalisierung*. Auf dem Hintergrund des skizzierten Konzepts der Sprechtätigkeit weist diese Formel darauf hin, wie auf der Grundlage immer umfassenderer Benutzung von Werkzeugen sich in wachsendem Maße Tätigkeiten in schematisierter Form (Handlungsformen) herausbilden, die in der Kommunikation benannt werden können, deswegen, weil sie faktisch als allgemeine (schematisierte) von den Menschen vollzogen werden. Andererseits ist klar, daß die Kommunikation selbst in immer stärkerem Maße die Schematisierung der Tätigkeiten und damit ihren gesellschaftlichen Charakter entwickelt.

Bei der Herausbildung der Intelligenz des Kindes müßte man demgemäß sehen, daß die Tätigkeit des Kindes von Anfang an gesellschaftlich vermittelt ist, daß sich seine Aktivität auf gesellschaftlich produzierte Gegenstände richtet, die Mittel seiner Tätigkeit gesellschaftlichen Charakter tragen, und daß die Ausbildung der sprachlichen Fähigkeiten genauso unter diesem Entwicklungsgesetz steht wie die Ausbildung motorischer Fähigkeiten. Die Entwicklung ist nicht so zu denken, als würden dem Kind die gesellschaftlichen Tätigkeitsformen von außen aufgeprägt, sondern es erwirbt sich diese nach und nach als immer neue Aktionsmöglichkeiten.

5.1. Bedeutung

Unsere bisherigen Ausführungen haben vielfältige Probleme behandelt und in Bezug zur Didaktik gesetzt:
Fragen des Verhältnisses von gegenständlicher Tätigkeit und der Herausbildung mathematischer Strukturen, die Rolle der gesellschaftlichen Instrumente der Wirklichkeitsbewältigung für die individuelle kognitive Entwicklung, die Frage nach der Bedeutung der Sprache in diesem Zusammen-

hang. Auf solche Grundlagenprobleme wurden wir verwiesen durch Anforderungen, vor denen ein Mathematikunterricht, der die formalistische Vereinseitigung vermeiden will, unweigerlich steht: Herstellung der Beziehung zwischen Mathematik und dem ganzen Reichtum ihrer Anwendungen, zwischen Tätigkeit und mathematischer Abstraktion, Realisierung der Einheit von 'Mathematisieren' und 'Mathematik als Fertigprodukt', eine Unterrichtsmethode, die die konstruktive Bearbeitung von Fakten möglich macht etc. Wir sind der Überzeugung, daß all dies kulminiert in einem grundlegenden Schlüsselproblem: *Wie kann die Bedeutung mathematischer Theorie entwickelt werden.* Wir stimmen dabei völlig der Formulierung von R. Thom bei: "Das wirkliche Problem, das sich im mathematischen Unterricht stellt, ist nicht das der logischen Strenge, sondern das Problem der Entwicklung von Bedeutung, daß Problem der 'ontologischen Rechtfertigung' der mathematischen Objekte." ((22), S. 202).

Diese Bedeutung versucht Thom zu beschreiben als die Fähigkeit, die mathematischen Abstraktionen als tatsächlich existent zu betrachten, d. h. also, mathematische Begriffe nicht metaphorisch, sondern strikt zu gebrauchen, stets von ihnen wirklich auszugehen. Wir möchten dieses *existent* nocht mit einem anderen Bild beschreiben. Wenn ich mit materiellen Objekten hantiere, beispielsweise baue, so treffe ich nach jeder Unterbrechung Material und Werkzeuge in genau dem Zustand an, in dem ich sie vorher hinterlassen habe, und ich kann meine Arbeit genau bei den Resultaten meiner vorherigen Aktivität fortsetzen. Dies war in (28) einmal als eine wesentliche Eigenschaft des mathematischen Denkens bezeichnet worden, sie wurde dort *Bewusstheit* genannt, d.h. die Fähigkeit, in jedem Moment beim Ergebnis des vorhergehenden Momentes anzuknüpfen und fortzufahren, Kontinuität herzustellen. Diese Kontinuität oder Bewußtheit ist aber nur möglich, wenn ich tatsächlich die Zeichen und Be-

griffe, mit denen ich operiere, als vollkommen bedeutungsvoll, als vollkommen real festzuhalten vermag. Diese bezeichnet nun auch Thom als den Kern der mathematischen Fähigkeit, und er sagt deshalb, daß das wirkliche Problem mathematischen Lehrens nicht das Problem logischer Präzision darstellt, sondern das Problem, Gefühl für die tatsächliche Existenz mathematischer Objekte zu erzeugen. Gegenüber einem materiellen Werkzeug, etwa einem Hammer, habe ich nicht die Möglichkeit es beliebig willkürlich zu gebrauchen, sondern nur, es zu benutzen oder nicht, d.h. ihn in seiner objektiven Bedeutung zu erkennen und entsprechend mit ihm umzugehen oder ihn in seiner spezifischen Qualität überhaupt nicht wahrzunehmen.

Dasselbe gilt für die Realität der mathematischen Objekte bzw. für die Bewußtheit im Umgang mit ihnen. Es gibt sozusagen nicht ein beliebiges, konventionelles und willkürliches Benutzen, sondern nur einen bedeutungsvollen Gebrauch oder aber eine Wahrnehmungslosigkeit ihnen gegenüber. Begriffe erhalten ihre Identität und Stabilität nur dadurch, daß sie bedeutungsvoll werden, ihr operativer Sinn begriffen wird und nicht durch ihre formallogische Behandlung. Ebenso erhalten Aussagen und Erklärungen ihre Plausibilität und Verbindlichkeit für die Aktivität des Subjekts nicht auf der Grundlage ihrer bloßen formallogischen Deduktion (bgl. (28) besonders S. 1127, Abschn. 4).

Aus dem bisher Entwickelten lassen sich einige allgemeine theoretische Prinzipien des Herangehens an dieses Problem der'mathematischen Bedeutung' ableiten.

Das oben entwickelte Verhältnis von gesellschaftlich erworbenen Mitteln der Auseinandersetzung mit der Wirklichkeit und der kognitiven Entwicklung ist auch ein Schlüssel zum Verständnis des Problems, wie sich die Beziehungen zwischen dem sozial-historischen Prozeß

der Ausarbeitung von Bedeutungen und ihrer individuellen Aneignung gestaltet. Es gibt ebenso einen Hinweis, wie der sich aufdrängende Widerspruch, daß einerseits Bedeutungen ihre Existenz immer im Bewußtsein einzelner oder vieler Individuen haben, ihnen aber andererseits eine Bestimmtheit und Objektivität über individuelle Vielfalt und Zufälligkeit hinaus eigentümlich ist, gelöst werden kann. Dieser Widerspruch und die Möglichkeiten seiner Auflösung sind für didaktische Grundfragen, wie etwa die Relation von Wissens- und Lernstruktur, von großer Tragweite. Ausubels Unterscheidungen von *logical meaning* und *psychological meaning* reflektiert diesen Widerspruch, ist aber in der von ihm vorgeschlagenen Fassung außerstande, die Einheit dieser beiden Momente zu begründen, ohne am Ende doch wieder das eine (logical meaning) in dem anderen aufgehen zu lassen.

Ebenso wie das Denken existieren auch Bedeutungen keineswegs nur in der Sprache, sondern in allen Produkten der gegenständlichen Tätigkeit der Menschen, vor allen Dingen aber in den Mitteln dieser Tätigkeit. Eine Bedeutungstheorie,die natürlich als eine zentrale Problematik die Sprache als Hauptträger und Hauptübermittler von Bedeutung hat, muß den Veränderungen des Inhalts der gegenständlichen Tätigkeit durch alle Entwicklungsstufen und Teile ihres Systems nachgehen, um zu einem angemessenen Begriff der Bedeutung in ihren verschiedenen Ausprägungen zu gelangen. Hier stimmen so verschiedene Autoren wie Leontjev und Bruner überein. Leontjev bezeichnet das Werkzeug als 'materielles Urbild der Bedeutung' ((26), S. 182). Bruner weist gegen Piaget, der die Möglichkeit handlungsmäßiger Darstellung bezweifelt, darauf hin, daß mit der Benutzung von Werkzeugen untrennbar die Möglichkeit der Übertragung, Verallgemeinerung, Verkürzung und Ersetzung einzelner Teile, der ihr entsprechenden motorischen Fertigkeiten verbunden ist.

Der Inhalt von *Bedeutungen* läßt sich als Einheit von gegenständlichen und gesellschaftlichen Momenten verstehen. Wie das Werkzeug nicht nur ein Gegenstand ist, der bestimmte pysikalische Eigenschaften aufweist, sondern zugleich 'ein gesellschaftlich erarbeitetes Verfahren fixiert', genauso eignet einer *Bedeutung* als Produkt gesellschaftlicher Erfahrung nicht nur ein gegenständlicher objektiver Inhalt, sondern zugleich eine Orientierung, durch welche Operationen dieser Inhalt herausgearbeitet, wie mit ihm umgegangen werden muß. Arbeit und Kooperation sind für die Benutzung von Werkzeugen genauso untrennbar, wie Denken und Kommunikation für die Benutzung von Sprache und des mit ihr verbundenen Bedeutungssystems. Bedeutung hat ihre Objektivität sowohl in der Gegenständlichkeit des Inhalts als auch in der sozialen Beziehung, die mit der Ausbildung von Bedeutung und dem Umgang mit ihr verbunden sind. In ihrer gegenständlichen Tätigkeit sind die Individuen sowohl produktiv als auch durch die Objekte ihrer Tätigkeit determiniert, werden ihre sozialen Beziehungen sowohl durch ihre eigene Aktivität hervorgebracht, als auch ihnen gegenüber gegenständlich. Individuelle Aneignung von Bedeutung heißt daher nicht, Psychologisierung im Sinne des scheinbar zufälligen und regellosen Gefühls- und Gedankenstromes der introspektiven Psychologie, sondern die Ausnutzung der in der Bedeutung angelegten Potenzen, damit auch möglicherweise ihre Verwandlung entsprechend der Logik ihres eigenen objektiven Inhalts und schließlich ihre erneute Vergegenständlichung, vermittelt durch das äußerst komplexe System der gesellschaftlichen Arbeitsteilung.

Zu Bedeutungen gibt es kein unmittelbares Pendant in der Wirklichkeit, das sich als ihr Inhalt aufweisen ließe. Nur durch die Operationen hindurch, die ihnen implizit zugrundeliegen, lassen sie sich sinnvoll auf Erfahrung beziehen. Das bedeutet, daß alle Erkenntnis wesentlich

approximativ ist, was mit allseitiger Widerspiegelung ebenso wenig zu tun hat, wie mit konventionalistischer Willkür; daß isolierte Bedeutungen keinen Widerspiegelungscharakter besitzen, sondern daß nur die Herstellung von Kontexten als Ausschöpfung der in ihnen angelegten operativen Möglichkeiten ihre Beziehung auf Erfahrung vermitteln kann.

Wenn wir den Begriff der Tätigkeit als Ausgangspunkt der inneren Systematik der Didaktik der Mathematik, ihrer interdisziplinären Bezüge und ihrer Methodologie vorgeschlagen haben, so ist es das, was Thom mathematische Bedeutung genannt hat, an dem sich dieser Vorschlag zu bewähren hat. Wir hoffen, daß es deutlich geworden ist, wie komplex diese Anforderung ist, wieviel theoretische Grundlagenarbeit in durchaus praktischem Interesse hier noch zu leisten ist, aber auch wie viele fruchtbare Einsichten für die Didaktik der Mathematik aus einer systematischen und komplexen Behandlung dieser Fragen zu gewinnen sind. Vorschläge, wie hier unmittelbar weiter fortgeschritten werden kann, haben wir im anschließenden Katalog von Forschungsproblemen, die sich aus diesem Papier ergeben, formuliert.

6. Forschungsprobleme

Zur Einleitung dieses Vorschlages von Forschungsaufgaben, die auch für die Arbeit des IDM relevant sind, sollen noch einmal kurz die zentralen Ergebnisse des vorliegenden Artikels rekapituliert werden, auf denen sich dieser Vorschlag begründet:

Erstens mathematische Intelligenz ist kein Primärdatum, von dem der Mathematikunterricht als einer unveränderbaren unhinterfragbaren Gegebenheit auszugehen hätte. Selbstverständliche Voraussetzung jeder Didaktik ist die Einsicht, daß die Intelligenz nur in ihrer konkreten Wirkungsweise und nicht an sich ein Problem darstellt (d.h. zum Beispiel nicht unveränderbar ist) und daß sie daher zum theoretisch-praktischen Problem gemacht werden kann. Es geht daher um ihre Nutzung. Das war wohl auch historisch der objektive Ausgangspunkt allen pädagogisch-didaktischen Bemühens. Die Thesen vom Entwicklungscharakter der Intelligenz und der Bedeutung sozialer Determinanten für den Lernprozeß scheinen mittlerweile pädagogische Allgemeinplätze zu sein. Wir sind aber der Meinung, daß einmal die pädagogische Praxis sich nach wie vor nur sehr inkonsequent solche Einsichten zueigen gemacht hat, zum anderen aber, daß diese selber einer theoretischen Begründung bedürfen, die sowohl hinlänglich beziehungsreich als auch genügend einheitlich sein sollte, um ihnen ihre volle Wirksamkeit im äußerst komplexen Beziehungsgefüge des mathematischen Unterrichts zu sichern. Unter diesem Gesichtspunkt halten wir das genetische und operative Herangehen an diese Problematik für das am besten geeignete.

Damit dieser Ansatz aber nicht zu einer undifferenzierten Rückführung aller Dimensionen des Lernprozesses auf eine einzige Ebene simplifiziert wird, ist es andererseits

notwendig festzuhalten: Der von dem operativen Ansatz behauptete innere Zusammenhang der physisch-psychischen Aktivitäten der Menschen ist nicht so zu verstehen, daß alle Formen der Aktivität im einfachen Analogieverfahren auf eine bestimmte Form reduziert und unter *eine* allgemeine Regel subsumiert werden könnten. Er bedeutet vielmehr, daß sie sich genetisch auseinanderentwickeln und daß diese Entwicklung nicht nur kontinuierlich verläuft, sondern die Entstehung qualitativ neuer und auf den vorherigen Stufen nicht gegebener Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten einschließt.[1)] Es folgt daraus, daß sich die Arten der physischen bzw. intellektuellen Tätigkeit sowohl in ihrer Einheit als auch in ihrem Unterschied gegenseitig beleuchten und erst in dieser gegenseitigen Reflexion der Erkenntnis hinreichend umfassend zugänglich sind. Das gilt auf allen Ebenen; so setzt beispielsweise jede effektive interdisziplinäre wissenschaftliche Zusammenarbeit ein hohes Niveau der in Fachdisziplinen spezialisierten wissenschaftlichen Tätigkeit voraus. Dies muß man sich vergegenwärtigen, wenn in den Forschungsaufgaben scheinbar sehr weit voneinanderliegende Bereiche wie etwa die gegenständliche, spielerische Aktivität des Kindes und entwickelte mathematische Themen aufeinander bezogen werden.

Vor der Benennung der Forschungsaufgaben sollte schließlich noch festgehalten werden, daß es uns hier keineswegs um einen vollständigen Katalog der Forschungsprioritäten des IDM gehen kann, sondern lediglich um die Benennung solcher Aufgaben, die sich aus dem im Artikel Dargestellten als vordringlich ergeben und sich von dort her erläutern. Eine ganze Reihe von Aufgaben, deren Bearbeitung uns notwendig erscheint, sind folglich hier nicht erwähnt. Es handelt sich um einen Beitrag zu einem

1) Den Zusammenhang von Diskontinuität und Entwicklung hat in der positiven Wissenschaft als erster Norbert Wiener stark betont.

solchen vorläufigen Katalog.

Katalog von Forschungsaufgaben

I: Entwicklung der mathematischen Theorie und mathematischer Unterricht

1) Geschichte der Mathematik und der systematische Aufbau der Mathematik im Unterricht (dargestellt an ausgewählten Bereichen)

Weder die These der Parallelität von Phylogenese und Ontogenese noch die These ihrer Gegenläufigkeit erfassen den Lernprozeß angemessen.

2) Bourbakis Mutterstrukturen und Piagets Gruppierungen

Einige didaktische Umsetzungen der Piaget'schen Theorie binden das operative Prinzip unmittelbar an den Begriff der Gruppierung; sie identifizieren die mathematische Modellierung kognitiver Strukturen mit den mathematisch-logischen Strukturen, die das Kind sich erwirbt. Das Verhältnis der kognitiven Strukturen zu den Strukturen der Mathematik ist aber ein noch zu klärendes Problem.

3) Empirische Wissenschaften und die Fundierung mathematischer Bedeutung im Unterricht

II: Didaktik der Mathematik und Interdisziplinaritaet

1) Entwicklungsprobleme der Didaktik der Mathematik als einer interdisziplinären Wissenschaft mit unmittelbarem Praxisbezug und hochgradig komplexem Gegenstand. (Die Herausbildung von Operations Research als eine Wissenschaft mit ähnlichen Entwicklungsproblemen ist dabei als

Modell heranzuziehen).

2) Operation und Bedeutung; theoretische Bezugspunkte einer Didaktik der Mathematik

3) Der Beitrag der Kognitionspsychologie bei der Reform des mathematischen Curriculums in den USA

III: Schluesselprobleme des Mathematikunterrichts

1) Theorie des mathematischen Curriculums im Zusammenhang mit der Curriculumreform (im internationalen Vergleich).

2) Zum Verhältnis von Aneignung mathematischer Bedeutung und Beherrschung mathematischer Techniken(etwa am Beispiel: Zahlbegriff und Rechenfertigkeit)

3) Kritik der didaktischen Konzeptionen zur Mathematisierung im Unterricht; Entwicklung von Kriterien zur Ausarbeitung einer Aufgabendidaktik

4) Zur Logik der Fehler im mathematischen Lernprozeß (Kooperation, Lehrerverhalten, Widerspruch von Begriff und Erscheinung als Determinanten von Fehlern)

5) Spiel, Lerngruppe und Unterricht (zum Wechselverhältnis von Stoffinhalt, Kooperation und Kommunikation im Unterricht)

6) Die Herausbildung mathematischer Abstraktionen und die Piaget'schen Dezentrierungen (zur Begründung des didaktischen Prinzips der führenden Rolle der theoretischen Kenntnisse im Unterricht)

7) Zum Verhältnis von Tätigkeit und Sprache im Mathematikunterricht

8) Zu einer Theorie der mathematischen Bedeutung

9) Didaktik der Mathematik und das *exemplarische Prinzip* (empiristischer Hintergrund und die Problematik der Kriterien bei der Auswahl des Exemplarischen)

10) Die Bedeutung der Anwendung von Mathematik für den Aufbau eines mathematischen Curriculums (sowohl bei der Motivation, als auch bei der Erarbeitung der Bedeutung einer Theorie)

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

(1) Ausubel: Educational Psychology, New York 1968

(2) Bauersfeld, Radatz, Rickmeyer, Schumacher: Begleitschrift zum Körperspiel, Hannover 1973

(3) O. Becker: Nietzsches Beweis für seine Lehre von der ewigen Wiederkunft. Zeitschrift für Psychologie (1955), 368-387

(4) E. Beth, J. Piaget: Mathematical Epistemology and Psychology. Dordrecht 1966

(5) J.S. Bruner: Toward a Theory of Instruction Cambridge (Mass.) 1967

(6) J.S. Bruner: Der Prozeß der Erziehung, Berlin 1972

(7) J.S. Bruner: Relevanz der Erziehung, Ravensberg 1973

(8) J.S. Bruner, R. Olver, P.M. Greenfield: Studien zur kognitiven Entwicklung, Klett-Verlag, Stuttgart 1971

(9) C.W. Churchman: Philosoph[illegible] des Managements, Freiburg 1973

(10) C.W. Churchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff: Operations Resarch, 5. Auflage München 1971

(11) o. Autor: Ergebnisse der sowjetischen Psychologie, E. Klett-Verlag, Stuttgart 1969

(12) Y. Elkana: Science, Philosophy of Science and Science Teaching, in Educ.Phil. and Theory, vol. 2 (1970), 15-35

(13) A. Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Klett 1973

(14) H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe Klett Verlag, Stuttgart 1973

(15) H. Freudenthal: Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben, Der Mathematikunterricht 4/63

(16) A. Fricke: Operative Zahlenerfassung, in: Rechenunterricht und Zahlbegriff, Verlag Westermann 1970

(17) H.G. Furth: Piaget für Lehrer, Düsseldorf 1973

(18) H.G. Furth: Intelligenz und Erkennen Verlag Suhrkamp, Frankfurt 1972

(19) C. Gattegno u.a.: Zur Didaktk des Mathematikunterrichts Hannover 1969

(20) W. Heisenberg: Das Naturbild der heutigen Physik, Hamburg 1965

(21) D. Hilbert: Über das Unendliche, Mathem. Annalen Bd. 95

(22) A.G. Howson (Hrsg.): Developments in Mathematical Education, Cambridge 1973

(23) Th. Kuhn: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, Frankfurt 1967

(24) H. Lenné: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland Stuttgart 1969

(25) A.A. Leontjev: Sprache-Sprechen-Sprechtätigkeit, Verlag Kohlhammer, Stuttgart 1971

(26) A.N. Leontjev: Probleme der Entwicklung des Psychischen, Berlin 1971

(27) Lurija/Judowitsch: Die Funktion der Sprache in der geistigen Entwicklung des Kindes, Schwann-Verlag 1970

(28) Th. Neumann, M. Otte: Über formale und inhaltliche Logik in der Didaktik besonders im Mathematikunterricht Studium Generale 24 (1971) 1121-1130

(30) J. Piaget: Psychologie der Intelligenz, Zürich 1947

(31) J. Piaget: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt 1973

(32) J. Piaget: Der Strukturalismus Verlag Walter, Freiburg im Breisgau 1973

(33) J. Piaget: Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Verlag Molden, Wien-München 1969

(34) J. Piaget: Erkenntnistheorie der Wissenschaften vom Menschen Frankfurt/M. - Berlin 1972

(35) J. Piaget/ A. Szeminska: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Klett Verlag, Stuttgart 1965

(36) M. Planck: Vorträge und Erinnerungen, Darmstadt 1973

(37) E. Schwarz (Hrsg.): Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule, Arbeitskreis Grundschule e.V., Frankfurt/M.

(38) Th. Seiler: Die Reversibilität in der Entwicklung des Denkens, Klett Verlag, Stuttgart 1968

(39) Th. Seiler: Die Bereichsspezifität formaler Denkstrukturen - Konsequenzen für den pädagogischen Prozeß, in: (Hrsg.) Frey/Lang: Kognitionspsychologie u. naturwiss. Unterricht Huber-Verlag, Bern 1973

(40) L.S. Shulman: Psychology and Mathematics Education, 169th Yearbook of the NSSE, Chikago 1970 23-71

(41) H. Skowronek: Lernen und Lernfähigkeit Juventa Verlag, München 1969

(42) W. Stegmüller: Personelle und statistische Wahrscheinlichkeit, 1. Halbb., Springer Verlag Heidelberg 1973

(43) K. Steinbuch: Mensch, Technik, Zukunft Stuttgart 1971

(44) H.J. Treder: F. Engels' Kritik an der absoluten Gültigkeit des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, Spektrum (1972), 26-29

(46) H. Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, Verlag Oldenbourg, München 1966

(47) A.N. Whithehead: Einführung in die Mathematik, Bern 1958

(48) R.L. Wilder: Historical Background of Innovations, 169th Yearbook of the NSSE, Chikago 1970, 7-22

(49) E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Verlag Vieweg 1974

(50) E. Wittmann: Infinitesimalrechnung in genetischer Darstellung, Ratingen 1973

(51) E. Wittmann: Die Bedeutung der Piaget'schen abstraction réfléchissante für die Entwicklung der mathematischen Formen, Deutsche Schule 61 H 9 (1969), 537-542

(52) E. Wittmann: Die Approximation als verbindendes Element in der Analysis, Math. Phys. Semesterberichte XIX/2 (1972), 174-186

(53) E. Wittmann: Zur gegenwärtigen Situation der Fachdidaktiken, Neue Sammlung 13 (1973 a), 120-129

(54) D. Wunderlich: (Hrsg.) Linguistische Pragmatik Frankfurt/M. 1972

(55) D. Wunderlich/ V. Maas: Pragmatik und sprachliches Handeln, Frankfurt/M. 1972

(56) L.S. Wygotskij: Denken und Sprechen, S. Fischer Verlag 1971

(57) L.V. Zankov: Didaktik und Leben, Hannover 1973

Dies ist ein Text, der in anderem Zusammenhang als Vortragsmanuskript entstanden ist und der hier wegen der grundsätzlichen Bedeutung des darin angesprochenen Problems für jede heutige Didaktik der Mathematik abgedruckt wird. Er versteht sich als Beitrag zu einer Methodologie der Mathematikdidaktik

NOTIZEN ZUM PROBLEM DER INTERDISZIPLINARITÄT

von Michael Otte

Im Zusammenhang der Frage, über die wir handeln, hört man häufig Überlegungen wie die folgende: "Die Wissenschaften, die früher einmal - vor Zeit - ein einziges und einheitliches Gefüge, einen 'Kosmos' bildeten, haben sich seit Beginn der Neuzeit mehr und mehr differenziert und spezialisiert. Längst haben wir als Disziplinen nicht mehr nur die klassischen Fakultäten der traditionellen Universität. Sondern wir haben etwa, wie einem soeben auf dem Buchmarkt erschienenen Katalog des deutschen Hochschulverbandes zu entnehmen ist, über 4000 Fächer, die an deutschen Hochschulen in Lehre und Forschung vertreten sind. ... Und wir wissen, daß zwischen diesen Fächern mehr oder weniger scharfe Kommunikationsgrenzen verlaufen. Das Spezialistentum, das sich immer weiter ausbreitet, scheint eine unaufhebbare Bedingung moderner Wissenschaft zu sein" (Weinrich). Und es wird dann weiter gesagt, daß man es für aussichtslos hält, den Versuch machen zu wollen, den fortschreitenden Differenzierungsprozeß der Wissenschaften anzuhalten oder in die gegenläufige Richtung umzukehren. Schließlich wird gefolgert, daß dies Bemühen identisch wäre mit dem Ruf nach der universalen, alles umfassenden und alles erklärenden Einheitswissenschaft. Es wird weiterhin Interdisziplinarität als ein

Problem der Kommunikation angesehen.

Dagegen hält nun der Biologe Peter Medawar, der 1960 den Nobelpreis für Medizin erhielt: "Es stimmt einfach nicht, daß in den Naturwissenschaften die Fakteninformation ständig anschwillt und uns zu ersticken droht. In Wirklichkeit wird der Faktenballast täglich weniger. In jeder Wissenschaft variiert der Faktenbestand im umgekehrten Verhältnis zu ihrer Reife. Der Fortschritt in der Wissenschaft bedeutet, daß immer mehr Einzeltatsachen durch Aussagen von immer größer werdender Allgemeinheit und Erklärungskraft erfaßt und dadurch in gewissem Sinne 'erledigt' werden: Weil man sie von nun an nicht mehr explizit zu kennen und zu memorieren braucht. ... Wir brauchen heute nicht mehr den Fall jedes einzelnen Apfels zu beschreiben. ... Und was die Frage der immer enger werdenden Spezialisierung anbetrifft, kann man behaupten, daß in Wirklichkeit genau das Gegenteil zu beobachten ist. Eines der auffallendsten Merkmale der modernen Wissenschaft ist das Verschwinden des alten fachlichen Sektierertums. ... Um die Jahrhundertwende konnte der Embryologe noch ungestört durchs Mikroskop sehen und sich in seiner eigenen kleinen Welt zuhause fühlen; aber heute kann er keinen Schritt weiterkommen, ohne auf Erkenntnisse der Bakteriologie, der Protozoologie und der allgemeinen Mikrobiologie zurückzugreifen; er muß die modernen Theorien zur Proteinsynthese wenigstens in Umrissen kennen und in der Genetik auf dem laufenden sein. ... Und ich habe den Eindruck, daß das in letzter Zeit häufig zu beobachtende erfolgreiche Überwechseln von Physikern und Chemikern in die biologische Forschung wohl kaum möglich gewesen sein dürfte, wenn sie in ihren ursprünglichen Fächern so spezialisiert gewesen wären, wie man uns immer glauben machen will."

Solchen einander so deutlich widersprechenden Ansichten liegt natürlich ein sehr unterschiedliches Wissenschaftsverständnis zugrunde. Zunächst ist es selbstverständlich,

und dieser Tatbestand drückt sich ja auch in solchen Namen wie Biochemie und ähnlichen aus, daß der Prozeß der Spezialisierung und Differenzierung der wissenschaftlichen Erkenntnis immer von dem gegenläufigen Prozeß der Vereinheitlichung, der Entwicklung von Beziehungen und Korrelationen zwischen verschiedenen Aspekten begleitet war. Immer ist die Entwicklung (vor allem der Natur- und Ingenieurwissenschaften) sowohl mit der Tendenz zu immer weiterer Spezialisierung wie auch mit der Tendenz zu fortschreitender methodologischer und theoretischer Verallgemeinerung verknüpft gewesen. D.h., es darf nicht vergessen werden, daß parallel mit dem Prozeß der Differenzierung der Wissenschaft sich auch ein Prozeß ihrer Integration durchsetzt und immer mehr vertieft. Schon heute erfordert die Lösung der meisten Grundlagen- und angewandten wissenschaftlichen Probleme ein komplexes Vorgehen, die Beteiligung vor Spezialisten zu verschiedensten Wissenschaftsdisziplinen.

Zum anderen scheint mir, daß der ersten Stellungnahme ein relativ kontemplativer und interpretativer Stil wissenschaftlicher Arbeit und eine ontologische Wissenschaftsauffassung zugrunde liegen. Wissenschaft ist aber meines Erachtens nicht kontemplativ, passiv, betrachtend. Wissenschaftliche Theorie hat, je weiter sie sich im historischen Verlauf differenzierte und entwickelte, um so stärker eine Wendung zum Methodischen genommen (Eine Wendung, die immer auch mit Mathematisierungstendenzen, wenigstens in ihrem fortgeschrittenen Stadium, verbunden war).

Heute ist der Prozeß wissenschaftlicher Theoriebildung entscheidend durch die Funktion wissenschaftlicher Erkenntnis geprägt, als Handlungsorientierung in den verschiedensten theoretischen und praktischen Problemzusammenhängen zu dienen. Die besondere Bedeutung der Wissenschaften in der Gegenwart ergibt sich aus ihrer

Funktion als zugleich "praktischer und ideeller Reichtum" der Gesellschaft, d.h. aus dem Verhältnis des Wissens von den Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen und Naturprozesse zu dessen Verwendung in der Produktion und in der Entwicklung der gesellschaftlichen Lebensbedingungen.

Jede Gesellschaft ist heute zunehmend darauf angewiesen, objektive Erfahrung in allen gesellschaftlichen Teilbereichen zu gewinnen und systematisch anzuwenden. Daraus resultieren die Tendenzen zur Vereinheitlichung auch von Natur- und Gesellschaftswissenschaften in ihren Methoden und in ihrer praktischen Umsetzung (Allerdings setzt der Transfer von methodologischen Erfahrungen, etwa der Naturwissenschaften auf die Sozialwissenschaften, voraus, daß man einerseits technokratische Vorstellungen von einer unmittelbaren Übertragbarkeit solcher Erfahrungen überwindet, andererseits verlangt er die Aufgabe von Positionen, die in idealistischer und kulturpessimistischer Weise die Einheit der Wissenschaften bestreiten.).

Bezeichnenderweise drückt sich die oben genannte Prägung auch ganz klar (als didaktische Aufgabe nämlich) in der ersten Problemausschreibung des *Zentrums fuer interdisziplinaere Forschung* der Universität Bielefeld aus:

> "Lassen sich die 'Neue Mathematik' (Mengenlehre) und neuere Richtungen der Logik und Linguistik zu einer konvergenten Theorie verbinden? Wenn ja, hat dann diese Theorie die Eigenschaften einer semantischen 'Grundwissenschaft', die so weit vereinfacht werden kann, daß sie schon im frühen Schulalter lehrbar und lehrenswert ist und als Grundlage nicht nur des Mathematik-Unterrichts, sondern auch des Sprachunterrichts in den verschiedenen Sprachfächern dienen kann? Kann die Curriculum-Arbeit sofort beginnen, oder fehlen

dazu noch wichtige Voraussetzungen?"

Der Prozeß der Vereinheitlichung, von dem Medawar sprach, ist natürlich immer ein Prozeß der Verallgemeinerung und der Reflexion auf stets höherem Abstraktionsniveau. Dabei ist nun die Wirksamkeit einer hoch abstrakten Theorie in starkem Maße wiederum von ihrem Methodenbewußtsein abhängig. Denn Wissenschaft sagt uns nicht, wie dieses oder jenes Ding im allgemeinen ist, sie behauptet nicht das Allgemeine ihrer Begriffe als unmittelbare Realität, sondern sie zeigt uns, wie wir vorzugehen haben, um die wesentlichen Zusammenhänge in jedem konkreten Fall zu bestimmen. Die Erkenntnis des Allgemeinen ist die Strategie der Erkenntnis des Einmaligen. Die Einheit der Aspekte kann nur operativen Charakter haben, die Einheit der Wissenschaft kann nur im Methodischen zum Ausdruck kommen, wenn man auch sieht, daß Methode und Theorie nicht zu trennen sind.

Ihr realer Zusammenhang ist jedoch eine gesellschaftliche und historische Variable. In der modernen Wissenschaft, der es nicht um die Feststellung des Seins in Form von allgemeinen Wesenskonstanten, nicht um ontologische Interpretation geht, gewinnen wissenschaftliche Erkenntnisse ihre Objektivität und ihre Verbindung zur Realität in Form der *Anwendung* im weitesten Sinne. Deutlich wird das beispielsweise an dem Begriff des Axioms bzw. des Axiomensystems. Im klassischen Sinne, d.h. etwa in der aristotelischen Auffassung, waren Axiome unmittelbar einsichtige Grundwahrheiten, heutzutage bilden sie ein mehr oder minder formales System, das zur Einführung nicht weiter interpretierbarer und nicht weiter reduzierbarer theoretischer Grundbegriffe dient. Die Bedeutung der abstrakten Symbolik auch der Mathematik ist vor allem operativ-funktionaler Art. Die Entwicklung der zugehörigen Struktur wird unter dieser Voraussetzung zur wissenschaftlichen Aufgabe. Ein wichtiges Beispiel für diesen Sachverhalt bildet die Grundlegung der

Wahrscheinlichkeit durch Kolmogorov.
In dem obigen Zusammenhang hat Stefan Boltzmann gesagt: "Es gibt nichts praktischeres als eine gute Theorie". Und Lavoisier macht sich in seinem "Traité élémentaire de Chimie" über die alte, einem interpretativen Begriffsrealismus verhaftete Wissenschaftsauffassung lustig: "... Das herrschende Schulsystem aber verfährt gerade umgekehrt. Man beginnt damit, die Prinzipien der Körper festzusetzen, die Tafel der Verwandtschaften zu *erklaeren*, ohne zu bemerken, daß man hierzu notwendig von Anfang an die wichtigsten Phänomene der Chemie zugrundelegen und Ausdrücke, die nicht definiert werden, gebrauchen muß, so daß man also die Wissenschaft die man lehren will, schon als fertig gegeben voraussetzt. ... Alles was man über die Zahl und die Natur der Elemente sagen kann, beschränkt sich demgemäß auf einige metaphysische Streitfragen: Es handelt sich hierbei um bestimmte Probleme, die man aufzulösen sucht, die aber einer Unendlichkeit von Lösungen fähig sind, ohne daß doch wahrscheinlich eine einzige unter ihnen im besonderen mit der Natur im Einklag ist. Dieses *von vornherein Erklaeren*, dieses Festsetzen von vorgegebenen Endaussagen ist im allgemeinen in der Wissenschaft nicht möglich.

Das vereinheitlichende Moment in der wissenschaftlichen Arbeit ist die Handhabung der Theorie als Methode. In diesem Zusammenhang spielen nun auch Probleme eine wichtige und widersprüchliche Rolle. Es ist nicht möglich, von vornherein vorgegebene Endziele zu fixieren,oft ist sogar eine detaillierte Problembeschreibung vorweg nicht möglich. Damit ist natürlich auch eine kurzschlüssige Verankerung der Methoden in den Aufgaben unmöglich. Die Einheit der Problemsituation impliziert niemals die Einheit bzw. die Festlegung der Methoden ihrer Bearbeitung. Ein Problem enthält nicht unmittelbar die Mittel seiner Lösung, sondern die wissenschaftliche Erkenntnis hat Systemcharakter, d.h. es müssen gerade die unterschiedlichsten Aspekte, die aus den verschiedenartigsten Erfahrungen erwachsen, zusammengetragen

und koordiniert werden. Das Projekt - oder Problemprinzip bildet demnach auch für die interdisziplinäre wissenschaftliche Arbeit kein ausreichendes integratives Potential. A. Weinberg, ehemals Direktor des Atomforschungszentrums in OAK RIDGE deduziert daraus sogar eine Diskrepanz von Gesellschaft und Universität. Er sagt: "Unsere Gesellschaft ist aufgabenorientiert. ... Die Universität dagegen ist fachorientiert. In der Gesellschaft ist der Nichtspezialist und der Koordinator König. ... In der Universität ist der Spezialist und der Analytiker König." Er fürchtet sogar, daß diese Diskrepanz zwischen Universität und Gesellschaft stetig größer wird, und zwar dadurch, daß die Fachgebiete, die die Universität ausmachen, entsprechend ihrer internen Logik immer komplexer, d.h. abstrakter werden. Will man nun diesem Gegensatz effektiv begegnen, so verlangt eine derartige Absicht jene weiter oben besprochene Veränderung der Wissenschaftsauffassung, der Methodologie der Wissenschaft und dementsprechend der Wissenschaftsorganisation.

Dabei bildet das Problemprinzip ein wichtiges organisatorisches Moment, aber die problemorientierte Forschung setzt immer ein hohes Niveau der disziplinorientierten Forschung voraus; auf der anderen Seite sind die disziplinorientierten Forschungsteams oft selbst interdisziplinär zusammengesetzt. Dies hängt wieder mit dem Systemcharakter der wissenschaftlichen Erkenntnis zusammen: "Die Vertiefung auf einem Wissenschaftsgebiet ist nur möglich, wenn die Grenzen dieser Disziplin überschritten und geeignete Fachrichtungen arbeitsteilig hinzugezogen werden. So sind z.B. in den physikalischen Instituten der Deutschen Akademie der Wissenschaften nur etwa 25-50% der Mitarbeiter Physiker, die übrigen Mitarbeiter gehören anderen wissenschaftlichen und technischen Disziplinen an", wird in einem Werk, das sich mit Problemen der Wissenschaftsorganisation befaßt, festgestellt, und weiter: "Der zunehmenden Spezialisierung und Integration in der Wissenschaft Rechnung tragend, entwickeln sich in immer stärkerem Maße auch Forschungszentren,

die die Wissenschaftsgebiete Physik, Biologie, Chemie, Kybernetik und Mathematik zu einem Komplex verbinden". Im Zentrum dieser Fragen scheint mir, wie gesagt, das Moment der *Methodologie* zu liegen. Ich möchte dazu nochmals an eine Aussage von Weinrich anknüpfen: "Interdisziplinäre Forschung ist Teamarbeit. Ich glaube nicht an den homo interdisciplinarius, der in einer einzigen Person mehrere Disziplinen umfaßt oder zu umfassen meint." Und er hält dagegen: "Auch wenn alle Teilnehmer eines interdisziplinären Kolloquiums selbst disziplinäre Wissenschaftler bleiben, so kann dennoch Interdisziplinarität als Habitus einer Gruppe entstehen". Dem ist zuzustimmen. Die Frage bleibt nun, worin besteht dieser Habitus des interdisziplinären Forschungsteams und wie sieht die Methodologie aus, die ihm zugrunde liegt. Ich würde tatsächlich sagen, daß ihm eine bestimmte Sehweise gegenüber der Wirklichkeit, eine bestimmte Auffassung des Theorie - Empirieverhältnisses, eine bestimmte Auffassung von dem, was Theorie zu leisten vermag und wie sie zu handhaben ist, zugrunde liegt; was einem solchen Team die Kompetenz verleiht, problemrelevante Fragen an die entsprechenden Bezugswissenschaften zu stellen. Ein wesentliches Moment dieser Sehweise ist nun, daß man nicht versucht, eine problematische Situation, die man lösen will, durch Theorie quasi abzudecken, daß man nicht glaubt, daß die Wirklichkeit vollständig in einzelnen Gesetzen oder theoretischen Aussagen aufgehen könnte, sondern daß man diese Theorie zur Strukturierung der eigenen Verfahrensweise gleichsam in Distanz zur Problemsituation benutzt, um das eigene Vorgehen von dieser Koordination her auch auf seine Präzision und seine Entwicklungsmöglichkeit zu befragen. Man muß berücksichtigen, daß der theoretische Begriff, - mag er auch noch so differenziert und entwickelt sein -, stets außerhalb seiner selbst seinen realen Gegenstand, sein reales Vorbild, seinen objektiven Inhalt besitzt.

Die genannten Momente interdisziplinärer Forschung treten

in für die moderne Wissenschaft paradigmatischen Disziplinen besonders klar zutage. Darauf verweist W. Nalimow in seinem Aufsatz: "Der Einfluß der mathematischen Statistik und der Kybernetik auf die Methodologie wissenschaftlicher Forschung". Er beginnt mit einer historischen Ableitung: Mehr als 200 Jahre lang galt unter den Naturforschern die Methodik des Einfaktorenexperiments als die einzig richtige. Es wurde angenommen, daß der Forscher alle unabhängigen Veränderlichen (Faktoren) seines Systems mit beliebigem Genauigkeitsgrad zu fixieren vermag. ... Wir sehen aber nun vor allem, wie sich die Anforderungen verändern, die an die mathematische Beschreibung der Beobachtungsergebnisse gestellt werden. Der Begriff des Naturgesetzes wird durch den sehr verschwommenen Modellbegriff ersetzt. ... Dieser Prozeß ist noch lange nicht abgeschlossen, er hat gerade erst begonnen". Und zur Beschreibung des Modellbegriffs meint er, "daß der Begriff des mathematischen Modells, wie er gegenwärtig in der Kybernetik verwandt wird, sehr gut mit dem Begriff des Naturgesetzes konfrontiert werden kann. Eine solche Abgrenzung wurde nötig, als die Anforderungen, die an die mathematische Beschreibung der Beobachtungsergebnisse zu stellen waren, verringert werden mußten. Naturgesetze gelten absolut. Von guten und schlechten Naturgesetzen zu sprechen, wäre einfach sinnlos. Genauso wenig kann man sagen, daß sich ein und dieselbe Erscheinung durch zwei oder mehrere unterschiedliche Gesetze beschreiben läßt. ... Auch die Frage, wie Naturgesetze zu verifizieren sind, wurde in der Methodologie der wissenschaftlichen Forschung nicht speziell betrachtet. Es wurde aber angenommen, daß eine solche Verifizierung so genau durchgeführt werden kann, daß die Ergebnisse zumindest für einen gewissen Zeitabschnitt beim gegebenen Wissensniveau eindeutig interpretiert werden könnten. Ganz andere Anforderungen werden an das mathematische Modell gestellt. ... Das mathematische Modell kann nur in gewissem Grade eine Vorstellung vom Verhalten eines schlecht organisierten Systems vermitteln." Diese Herausarbeitung des operativen

Charakters von Wissenschaft, die mit der Komplexität der Anforderungen zusammenhängt, denen sie sich stellt ("diffuse Systeme"), hat natürlich nicht erst mit der Herausbildung der Kybernetik begonnen, sondern ist in der gesamten Entwicklung der neuzeitlichen Naturwissenschaft in etwa enthalten. Länger schon hatte man das Mißverständnis überwunden, daß sich theoretische Aussagen, Gesetze und Modelle quasi unmittelbar auf Realität bezögen, sich von selbst und unmittelbar in Problemlösungen umsetzen könnten. Länger schon wußte man um den prinzipiellen Näherungscharakter unserer Erkenntnis, wußte man, daß Theorien nur lokal die Realität darzustellen vermögen etwa in dem Sinn, in dem der Kreis und seine Tangente nur lokal übereinstimmen. Dieses Bild scheint mir übrigens auch von Nutzen zu sein zum Verständnis des Verhältnisses von 'widerspruchsvollem Prozeß' und 'logisch widerspruchsfreiem mathematischen Modell'. Schließlich hatte man auch schon lange die Überzeugung, daß wissenschaftliche Aussagen und theoretische Gesetze in relativer Distanz und auf dem Boden der Erfahrung gehandhabt werden müssen, und man wußte, daß keine exakten (quantitativen) Modelle zu gewinnen sind, ohne daß ihrer Auswahl gewisse qualitative Vorstellungen über die zu modellierenden Gegebenheiten zugrunde lägen. Untersuchungen der Entwicklungsgeschichte wissenschaftlicher Begriffe zeigen im übrigen, welch entscheidende Bedeutung dieser Fähigkeit zur Bewegung zwischen den gegensätzlichen Momenten wissenschaftlicher Forschung: Theorie und Empirie, begriffliche Abstraktion und Rezeption von Faktenmaterial zukommt. Die Analyse der Entwicklung 'des wissenschaftlichen Begriffs' zeigt diese tatsächlich als einen Prozeß des Ineinanderwirkens der widersprüchlichen Momente: Verallgemeinerung und Verankerung im Besonderen und Einzelnen auf allen Niveaus der Abstraktion. Sie stellt damit diesen Prozeß in den Kern jener Dualität von Integration und Spezialisierung in der historischen Entwicklung der wissen-

schaftlichen Tätigkeit, von der wir ausgegangen waren. Auf der entsprechenden Ebene läßt sich auch erst das Problem analysieren, das H. v. Hentig andeutet,wenn er sagt:
"Am Ende des vorigen Jahrhunderts hat man - unter dem Eindruck der Erfolge der Physik - den Begriff der *Energie* in alle möglichen anderen Disziplinen übertragen und hat damit überall Verwirrung gestiftet. Sind wir heute mit *Information, Regelkreis, Entropie* besser dran?"

Derartig allgemeine Begriffe und Überlegensschemata sind nur in intensivem Zusammenhang mit der intimen Kenntnis und sich entwickelnden Erfahrung in einem bestimmten Bereich nutzbar und nicht als schlecht allgemeine *Erklaerung* bzw. bloße Sprachregelungen ohne inhaltlichen Bezug.

Ein schönes Beispiel, das zeigt, wie sich aus dem hohen Entwicklungsniveau einzelner Wissenschaftsdiziplinen neue grundlegende Überlegungsschemata und Orientierungsprinzipien ergeben, die zugleich die methodologischen Grundlagen und Integrationsmomente für interdisziplinäre problemorientierte Forschungsteams bereitstellen, entnehme ich den Memoiren des Physikers Manfred von Ardenne. Er schreibt dort unter der Überschrift "Was gab mir den Mut zur Krebsforschung?": "Es war die Einschätzung, daß zur Bekämpfung der Krebskrankheit gerade nach den jahrzehntelangen vergeblichen Anstrengungen der klassischen Medizin und Biochemie ein Versuch unter starker Mitbeteiligung physikalischer und mathematischer Methoden besonders gute Erfolgsaussichten haben könnte. Hierin bestärkte uns die fast triviale Einsicht, eine Heilung der fortgeschrittenen Krebskrankheit könne nur durch therapeutische Maßnahmen extrem hoher *Selektivitaet* gelingen (Heraushebung von mir)". *Selektivitaet* ist hier die gemeinte Grundvorstellung, eine Vorstellung, die der Physik (man

denke an Resonanzphänomene - Schwingkreise - oder Rückkopplungsmechanismen) und der Mathematik (Fourier Analyse) sehr geläufig ist. Während etwa Mediziner, ihrer Denkweise eher entsprechend, auf direktem Wege die Nivellierung des Unterschiedes von kranken und gesunden Zellen anstrebten, ging von Ardenne, gestützt auf gewisse Ergebnisse Warburg's bezüglich der Zellatmung, aufgrund der obigen Überlegungen dazu über, diesen Unterschied zunächst maximal zu steigern, um signifikante Reaktionsdifferenzen zwischen gesunden Zellen und Krebszellen zu erreichen. Und um dann durch ein hochkomplexes Zusammenspiel vieler zu kombinierender Einzelattacken mit unterschiedlichen Wirkmechanismen diese Verhaltensunterschiede der Zellen auszunützen. Wobei er meinte, daß auch hier wieder "das polyfunktionelle Denken des Physikers große Vorteile bringen würde".

Derartige allgemeine Überlegungsschemata und integrative Vorstellungen, die in der interdisziplinären problemorientierten Forschung wichtige Dienste erfüllen, sind im allgemeinen eigentlich Funktionsmodelle und als solche vielseitig anwend- und interpretierbar, was ihnen unter Umständen einen relativ formalen Charakter verleiht. Paradigma eines solchen Funktionsmodelles aus dem Bereich der Kybernetik und Technik ist der sogenannte "schwarze Kasten" (black box). Dazu schreibt A.G. Oettinger, der sich mit dem Gebrauch von Computern im wissenschaftlichen Theoriebildungsprozeß auseinandersetzt: "Wenn die black box geöffnet wird, können Inspiration, Glück und empirische Verifizierung ein Funktionsmodell in ein Strukturmodell verändern. Die Physik kennt eine Fülle von Beispielen für diesen Vorgang. Das Atom bei Lucretius oder J. Dalton (1766 - 1844) hatte rein funktionalen Charakter. Moderne Atom-Theorien sind strukturell, das Atom mit all seinen Komponenten ist jetzt beobachtbar". Der zugrundeliegende Zusammenhang von Theorie und Empirie,

von Theoretischem und Methodischem, von Funktionsmodell und Strukturmodell ist unaufgebbar. Funktionsmodelle sind wie gesagt nicht unabhängig von theoretischem Wissen und experimenteller Erfahrung als bloße Analogie zu benutzen. Schon allein nicht wegen der "Unfähigkeit methodologischer Richtlinien als solcher zwingend zu einer ausschließlichen Schlußfolgerung zu führen" (Th. S. Kuhn). Der große Mathematiker H. Weyl schreibt hierzu: "Unter dem Einfluß skeptischer Erkenntnistheorie war es eine Zeitlang im 19. Jahrhundert namentlich in der englischen Physik Mode geworden, nur Bilder, Analogien für beschränkte Tatsachengebiete zu suchen, mechanische Modelle zu konstruieren, die gewisse Züge der abzubildenden Erscheinung wiedergaben, die man aber als "Erklärung" unmöglich ernst nehmen konnte - da man vom "Wahn" befreit war, daß es gelte, eine in sich eindeutig bestimmte Wirklichkeit zu erkennen. Aber die Methode erwies sich als merkwürdig unfruchtbar (Unterstreichung von mir), sobald man bewußt darauf ausging, nur Bilder und Modelle zu entwerfen " (S. 206).

Umgekehrt geht es auch nicht um eine empiristische Identifizierung von Theorie und Erfahrung bzw. um ontologisierende Wesensinterpretationen, sondern es geht um die Erarbeitung von Handlungsmöglichkeiten gegenüber dem noch Unbekannten. Ein Beispiel dazu aus der Mathematik: Jahrhundertelang beschäftigte die Mathematiker die Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen bzw. nach der expliziten Darstellung der einzelnen Lösungen. Erst im 19. Jahrhundert wurde das Problem durch E.Galois gelöst. Wesentlich dabei war, daß Galois nicht unmittelbar nach den einzelnen Lösungen und deren Darstellung bzw. nach der Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen fragte,sondern, ihre Existenz unterstellend und die damit gegebenen operativen Möglichkeiten ausnützend, begann, die Struktur der Beziehungen zwischen ihnen aufzudecken. Er benutzte die Wurzeln dieser Gleichungen

als Funktionsmodelle und bezog dadurch das Unbekannte in seine intellektuelle Tätigkeit ein. Auf diese Weise gelang ihm auch die Beantwortung der Existenzfrage bzw. die Aufdeckung der Bedingungen der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen.

Der nämliche Vorgang spielte sich auch schon früher bei dem Übergang von der Arithmetik zur Algebra durch Einführung der unbekannten variablen Größen "x" ab, die ebenfalls neue Handlungsmöglichkeiten eröffnete; und er wiederholt sich immer wieder. (In der Kybernetik stellt das Modell des 'Zufallsgenerators' ebenfalls eine solche operative Größe dar.)

Jede Erkenntnis von Strukturen, jedes Handhaben von Teilerkenntnissen bezieht sich auf das in dem jeweiligen offenen oder geschlossenen System vorhandene Unbekannte und bezieht es faktisch in die theoretische und experimentelle Tätigkeit ein.

Die Herausbildung dieser Fähigkeit ist aber in wachsendem Maß mit der Hebung des Niveaus von Kooperation und Organisation in der wissenschaftlichen Arbeit verbunden. Je besser unterschiedliche theoretische und praktische Gesichtspunkte aufeinander bezogen werden können, eine umso größere Unabhängigkeit gewinnt der Theoriebildungsprozeß gegenüber der Suggestion vorgegebener Fragestellungen und Fakten und umso vielfältiger können theoretische Konstruktionen auf Erfahrung bezogen und an ihr überprüft werden.

Wenn in den empirischen Wissenschaften über die Unbrauchbarkeit und angebliche Abstraktheit der mathematischen Modelle geklagt wird, beruht dies im allgemeinen auf einer Verwechslung von Funktion und Struktur sowie dem damit verbundenen Versuch, die Ganzheit von Erscheinungen unmittelbar zu erfassen bzw. die eigene Praxis zugunsten einer bloßen Deduktion im mathematischen Modell

aufzugeben. Das Resultat solcher vergeblichen Bemühungen war dann meist der Verzicht auf den Gebrauch von Mathematik und mathematischen Modellen und ein resignierendes Zurückfallen in den alten Praktizismus.

Der Prozeß der Gewinnung und Anwendung wissenschaftlicher Erkenntnis besitzt eine Struktur und eine Logik. Demgemäß sind die Erarbeitung und Verwendung wissenschaftlichen Wissens und damit auch die Probleme der interdisziplinären Kooperation Probleme der *Organisation*. Nur aus dieser Sicht gewinnt man ein Bild des modernen Wissenschaftsprozesses in Form registrierbarer Parameter. Peter Caws hat auf einem meeting der AAAS im Dezember 1967 darauf hingewiesen, daß der Prozeß des wissenschaftlichen Forschens und Entdeckens nicht weniger eine Logik besitzt, als der der reinen Deduktion. Und er wirft denjenigen, die in diesem Zusammenhang sich dauernd mit Termini wie *Kreativitaet, Einsicht, Reife, Intuition* und ähnlichen begnügen, vor, daß sie sich die Möglichkeit einer Analyse des Prozesses der Konzipierung und Entwicklung der Theorie verstellen und damit auch auf Einwirkungsmöglichkeiten auf diesen Prozeß verzichten, weil sie von diesen Dingen immer im Rahmen der Frage "Wie ist es geschehen?" sprechen. Auf Karl Poppers statement, daß jede wissenschaftliche Entdeckung ein irrationales Element oder eine kreative Intuition in Bergson's Sinn enthält, antwortet er: "Meine Meinung ist, daß, wenn man dies von dem Prozeß der Entdeckung sagt, man es mit demselben Recht von dem Prozeß der strikten logischen Deduktion behaupten kann, und so könnten wir dann dem Gesamtkanon der Selbstzeugnisse emphatische und rührende Geschichten über diese letztere Aktivität hinzufügen."

Dabei darf man nun allerdings die Frage der Organisation meiner Meinung nach nicht in einem sterilen

Form - Inhalt - Dualismus sehen, sondern Organisation heißt hier immer Organisation von widersprüchlichen Zusammenhängen (wobei dann auch stets inhaltliche Fragen 'formal' und formale Fragen 'inhaltlich' diskutiert werden).
Nur die Organisation gewährleistet den Zusammenhang von fachwissenschaftlich spezialisierter Kompetenz und einer Allgemeinheit der Orientierung, wie sie die Komplexität vieler Situationen erfordert. Somit steht gar nicht die Alternative: Etablierung einer Universaltheorie und Einheitswissenschaft auf der einen Seite, bzw. eines rein im Atmosphärischen schwebenden Zustandes andererseits, sondern es geht darum zu sehen, daß die höhere Abstraktion und Allgemeinheit eine größere Abhängigkeit vom Zusammenwirken verschiedener wissenschaftlicher Disziplinen und gesellschaftlicher Praxisbereiche nach sich zieht und daß dieses Zusammenwirken ein Problem der Organisation darstellt.

'Denken' und 'Handeln', Reflexion und Aktion zusammenzubringen, ist stets ein Organisationsproblem, das als solches nur kooperativ gelöst werden kann. Erst die kooperativ organisierte wissenschaftliche Arbeit stellt den Zusammenhang her zwischen theoretischer Abstraktion bzw. Generalisierung und der Tatsache, daß deren Aneignung und funktionale Umsetzung, d.h. ihre (theoretische und praktische) Wirksamkeit abhängig ist vom richtigen Verhalten. "Die Erfahrung hat gezeigt, daß je intensiver sich die Wissenschaftler eines Landes mit der Organisation von Wissenschaft befassen, um so erfolgreicher sich die Wissenschaft in jenem Land entwickelt" (P. Kapitza). Soweit ich sehe, besteht im allgemeinen jedoch eine deutliche Diskrepanz zwischen dem Entwicklungsniveau der Wissenschaften und den empirisch-intuitiven Organisationsformen der Wissenschaftsprozesse, was in den Universitätsfakultäten mit ihrem weniger komplexen Bezugssystem nicht so ins Auge fällt. Dadurch

hält man dort auch wissenschaftsorganisatorische Maßnahmen oft für wenig relevant. Dies sowie die Tatsache, daß "Wissenschaftler oft stolz auf die Vagheit sind, die ihre Tätigkeit umgibt" (Churchman) und die damit verbundene Überbetonung von 'Stilfragen', verführen möglicherweise zu dem Glauben, daß die Probleme der interdisziplinären Kooperation vor allem Kommunikationsprobleme seien.

Was das Problem der Interdisziplinarität anbetrifft, so lassen selbst die Zeugnisse und Erklärungen der Spezialisten vermuten, daß dieses wissenschaftstheoretische und wissenschaftsorganisatorische Problem erst am Anfang einer auch nur halbwegs effektiven Lösung steht und daß es ein unsere Gesellschaft dauernd begleitendes Problem sein wird, gerade weil es so wichtig für die Gestaltung eines angemessenen Theorie-Praxis- bzw. Theorie-Empirie-Verhältnisses ist. Wenn wir beispielsweise im Licht des hier Dargelegten noch einmal auf das statement Weinberg's bezüglich des Gegensatzes von Wissenschaft und Gesellschaft zurückkommen, dann sehen wir, daß das 'Problemprinzip' noch viel weitergehende Voraussetzungen hat (die es allerdings auf der anderen Seite zum Teil erst real zum Vorschein bringt, d.h. es wird damit auch selbst zur Triebkraft). Diese Bedingungen sind insbesondere nicht rein theoretischer Natur, sondern beinhalten ebenso praktische,gesellschaftliche, soziale, sozialpsychologische und politische Aspekte. Und das Dilemma der gegenüber der "Komplexität der Anforderungen sowie dem Differenzierungsgrad des Wissens hoffnungslos überforderten Kapazität des Einzelnen" ist insofern wissenschaftlich ein Scheinproblem, als die Probleme der individuellen Aneignung sowie der gesellschaftlichen Orientierungs- und Handlungsfähigkeit des Einzelnen sich nicht in der unmittelbaren Beziehung auf ein gegebenes Niveau des differenzierten wissenschaftlichen und technischen Wissens stellen, sondern durch die gesellschaftlichen Ver-

hältnisse organisiert und vermittelt sind. Steigende Abstraktion und Generalisierung in solchen spezialisierten Systemen, wie etwa der wissenschaftlichen Forschung, sind einerseits spezielle Potentiale eben dieser Systeme und nur mit deren Mitteln zu steigern. Andererseits wären sie unmöglich, wenn sie nicht sukzessive auf jeder Stufe der gesellschaftlichen Reproduktion integrierbar wären. Selbstverständlich korrespondieren der Entwicklung dieser Verhältnisse besondere Typen der Tätigkeit und des theoretischen Verständnisses. Eine Besonderheit dieser Tätigkeit (bzw. dieses Wissens), - die übrigens auch von Weinrich angesprochen wird, wenn er bezüglich der Auswahl der bereits zitierten Problemfrage des ZIF in Bielefeld sagt, daß man "bei der Formulierung der Problemfrage den akuten und aktuellen Problemen der Gesellschaft sehr nahe auf den Fersen" bleiben wollte -, resultiert nun daraus, daß äußerst konkret der Grad der wissenschaftlichen Voraussetzungen zur Lösung bestimmter Probleme zu ermitteln und gleichzeitig der reale sozialökonomische, politische und sozialpsychologische Kontext zu prognostizieren ist.

Der uns hier interessierende Typus der Tätigkeit wird häufig als Systemanalyse bezeichnet. Dazu entnimmt man einem Buch von A. C. Enthoven und K. Smith die folgende Charakteristik: "Systemanalyse ist das rationelle Herangehen an die äußerst komplizierten Probleme der Auswahl in Zusammenhängen, die durch einen hohen Grad von Unbestimmtheit gekennzeichnet sind ...; sie ermittelt Alternativverfahren zur Durchführung einer bestimmten Arbeit; mit ihrer Hilfe wird der Versuch unternommen, die effektivsten Alternativen zu finden, wobei nach Möglichkeit quantitative Bewertungen eingeführt werden. Diese Analyse ist gleichzeitig eklektisch und einheitlich. Sie ist keine Physik und keine Ingenieurwissenschaft, weder Mathematik noch Ökonomie, weder politische Wissenschaft noch Statistik noch Militär-

wissenschaft; jedoch enthält sie Elemente aller dieser Disziplinen. Sie ist eher ein Denkspeicher als ein spezielles Wissensgebiet. ... Derjenige ist ein guter Spezialist für Systemanalyse, der kompromißlos grundlegende Fragen im Zusammenhang mit dem zu lösenden Problem zu stellen vermag. ... Die Systemanalyse ist eher eine Philosophie als eine Menge analytischer technischer Mittel".

Für das IDM besitzen diese Fragestellungen großes Gewicht, da der Gegenstand der Arbeit dieses Instituts von vornherein nur interdisziplinär fixiert werden kann. Über Mathematiker und Pädagogen hinaus werden wir in unserer wissenschaftlichen Arbeit dauernd auch auf die Unterstützung durch Naturwissenschaftler, Linguisten, Psychologen und Soziologen angewiesen sein. Damit steht vor dem Institut die Aufgabe, abgestufte Formen der interdisziplinären Zusammenarbeit zu entwickeln, die seinem Arbeitsgegenstand und den sich daraus ergebenen Problemstellungen entsprechen. Dabei gehen wir, wie gesagt, davon aus, daß Inhalte und Organisationsformen sehr eng zusammengehören. Ein erster Schritt in der nun 2-monatigen Tätigkeit des IDM war die Bemühung um bereits anderweitig gemachte, wissenschaftsorganisatorische Erfahrungen zu diesem Problem der Interdisziplinarität und zu anderen Fragen. So wurden Besuche beim IPN in Kiel und in Frankreich durchgeführt, protokolliert und ausgewertet. Weitere Informationsbesuche sind geplant, und das IDM ist an Anregungen von außen dauernd interessiert. Die wichtigste Funktion messen wir dabei dem Wissenschaftlichen Beirat des IDM zu. Des weiteren sollen workshops mit Spezialisten der Bezugswissenschaften unter spezifischen Fragestellungen organisiert werden. Dies setzt jedoch, meiner Meinung nach, eine Kompetenz des Befragens jener Fachspezialisten voraus, die nur von selbst interdisziplinär zusammengesetzten Arbeitsteams des IDM erreicht werden kann.

Genauso wenig wie den "homo interdisciplinarius" gibt es den Fachspezialisten, der ohne Sachverstand in forschungsrelevanter Weise befragbar wäre. Auf andere Weise scheint es kaum möglich zu sein, workshops im Hinblick auf Fragestellungen der Mathematikdidaktik vorzubereiten und auszuwerten. Interdisziplinäre Arbeit ist nur über eine Vielzahl von Vermittlungen möglich.

Ein wichtiges drittes Moment bilden in diesem Zusammenhang, wie aus dem Vorhergehenden verständlich sein mag, stabile und umfassende Kontakte zu Lehrern und zur Unterrichtspraxis in der Schule. Alle Maßnahmen in diesen Zusammenhängen strukturieren sich im Schema der folgenden fünf Funktionen: Forschung - Entwicklung - Anwendung - Beratung - Personal - und Nachwuchspflege, (dabei ist organisatorisch vor allem die letzte von zentraler Bedeutung).

Ich möchte meine Überlegungen zu dem ganzen Problem, gerade wegen seiner großen Bedeutung für das IDM, nochmals an einem unserer Arbeit relativ nahestehenden Beispiel exemplarisch zu verdeutlichen versuchen. Dazu soll im folgenden ein Auszug aus einem soeben hier bei uns erschienenen Buch (vgl. die Dokumentation in diesem Heft) des Psychologen L. V. Zankov herangezogen werden, und zwar geht es in dem vorliegenden Text um das Verhältnis von Pädagogik und Psychologie. Zankov beginnt mit der Bemerkung, daß in den Lehr- und Handbüchern der Pädagogik der Charakter der Beziehung zwischen Pädagogik und Psychologie immer nur als Nutzung der Daten, die von der Psychologie gesammelt worden sind, durch die Pädagogik verstanden wird. Zankov meint dagegen: "Die Frage nach der Beziehung zwischen der Pädagogik und der Psychologie wird jedoch auch dann nicht erschöpfend gelöst werden, wenn all das Wertvolle, das die psychologische Wissenschaft enthält,

als Grundlage für die Entwicklung der pädagogischen Theorie und für die Vervollkommnung der Praxis des Unterrichts und der Erziehung verwendet werden würde. Die Auffassung von der Beziehung zwischen der Pädagogik und der Psychologie, wie sie in wissenschaftlichen Arbeiten und in Lehrbüchern der Pädagogik festgehalten ist, gibt nicht die wahre Situation auf dem Gebiet der Praxis der Unterrichts- und Erziehungsarbeit wieder". Er weist dann mit der folgenden Aussage darauf hin, daß hervorragende Pädagogen immer schon die wissenschaftliche Erkenntnis im Zusammenhang ihrer Funktion als Handlungsorientierung, d.h. Theorie als Methode gesehen und benutzt haben: "Die Erziehung und das Erkennen der kindlichen Psyche waren untrennbar (für diese Pädagogen, M.O.) miteinander verbunden. Die Beobachtung und das Studium der Schüler als ein organischer Bestandteil der erzieherischen Arbeit folgt mit zwingender Notwendigkeit aus der Natur des Unterrichts-und Erziehungsprozesses". Dieser Umstand zeitigt Konsequenzen für den Zusammenhang von Pädagogik und Psychologie: "Die Wechselbeziehung zwischen der Pädagogik und der Psychologie beschränkt sich durchaus nicht darauf, daß die Pädagogik sich auf die Daten der psychologischen Wissenschaft stützt... Die wichtigste Forderung lautet vielmehr: "Die experimentalpsychologische Methodik und die psychologische Analyse müssen zum organischen Bestandteil der pädagogischen Forschungen werden." Zankov weist dann darauf hin, daß diese Handhabung der Theorie als Methode im Zusammenhang eines langen Entwicklungsprozesses seit den großen Denkern Rousseau und Pestalozzi zu sehen ist und daß die Techniken der Erfahrung als Resultat dieser Entwicklung vielfältiger geworden sind und sich komplexeren Problemen stellen können. Es werden heute vielfältige Verfahren angewendet, um den Gegenstand zu untersuchen. Er weist schließlich darauf hin, daß, um es mit unseren Worten zu sagen, Theorie und Methode

nicht getrennt werden dürfen, daß der Prozeß der Generalisierung und Abstraktion stets als ein Prozeß zu empirischen Situationen hin verstanden und genutzt werden muß. Er sagt nämlich: "Es ist von größter Wichtigkeit, daß die experimental-psychologischen Verfahren nicht formal und mechanisch in die Untersuchung einbezogen werden, sondern in strenger Übereinstimmung mit den spezifischen pädagogischen Fragen, die gelöst werden müssen. In Veröffentlichungen zu didaktischen Fragen ist von der Notwendigkeit der Kooperation zwischen den Psychologen und den Didaktikern die Rede. So wird in einer Zeitschrift betont, daß diese Kooperation noch fruchtbarer ist, wenn die Psychologen und die Didaktiker an einem Problem gemeinsam arbeiten. In Wirklichkeit jedoch werden die experimental-psychologischen Methoden und die psychologische Analyse in didaktischen Untersuchungen fast gar nicht genutzt. Die pädagogische Einwirkung und das erreichte Ergebnis werden unmittelbar korreliert." Als einen der Gründe des damit ausgelösten Zurückbleibens der pädagogischen Wissenschaft und der Didaktik nennt Zankov das mangelnde Verständnis von Interdisziplinarität, die Meinung "im Rahmen der Pädagogik müsse die *rein paedagogische* Erforschung des Erziehungs- und Bildungsprozesses erfolgen." "Um diesen Rückstand aufzuholen, müssen insbesondere das Herangehen an die Erarbeitung wissenschaftlicher Probleme, die Forschungsmethoden und das Verhältnis der Wissenschaft zur Schulpraxis *geaendert* werden". Und er geht schließlich noch einmal auf die mangelhafte Methodologie als Ursache für den schlechten Zustand der pädagogischen Wissenschaft ein, indem er sagt, "dieser Zustand der pädagogischen Wissenschaft hängt damit zusammen, daß die Wissenschaften, die Regeln für die Praxis entwickeln, und die Wissenschaften, die objektive Gesetze auf einem bestimmten Gebiet der Wirklichkeit entdecken, irrtümlicherweise als einander entgegengesetzt betrachtet werden". Man meint: "Die Psychologie studiere den Verlauf der psychischen Pro-

zesse, die Pädagogik aber habe zum Gegenstand die Frage, wie der Unterricht und die Erziehung sich zu vollziehen haben".

Hierin sind nochmals beide von uns betonten Momente enthalten. Einmal die Funktion von Theorie als Orientierungsgrundlage, zum anderen die Feststellung, daß diese Wendung der Theorie zur Methode nur auf der Basis der interdisziplinären Kooperation der wissenschaftlichen Arbeit, d.h. der vollen Entfaltung des Systemcharakters wissenschaftlicher Erkenntnis und der hinreichenden Differenziertheit und Verschiedenartigkeit der zu koordinierenden Aspekte des Erkenntnisgegenstandes zu erreichen ist.

Es handelt sich im folgenden um den Vorabdruck eines Artikels aus einem demnächst beim Verlag F. Springer, Berlin - Heidelberg - New York erscheinenden Buch zu dem Thema: Mathematiker über die Mathematik. Wir danken Autor und Verlag für die Genehmigung zum Abdruck.

Dr. Hermann Dinges ist Professor für Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik an der Universität Frankfurt. Professor Dinges gehört dem Wissenschaftlichen Beirat des IDM an.

SPEKULATIONEN ÜBER DIE MÖGLICHKEITEN ANGEWANDTER MATHEMATIK

Hermann Dinges

Obwohl die Mathematik als extrem theoretische Wissenschaft gilt, drängen immer mehr Abiturienten zum Mathematikstudium mit der Absicht, sich für einen praktischen Beruf zu qualifizieren. Es soll hier die Frage angeschnitten werden, welchen Beitrag die Angewandte Mathematik bei dem Versuch leisten könnte, die Ausbildung den veränderten Ansprüchen anzupassen. Um den Ansatzpunkt zu verdeutlichen, sind einige (vielleicht recht persönliche) Eindrücke von (insbesondere unter Mathematikern) herrschenden Vorstellungen über das mathematische Denken vorangestellt.

Die meisten unserer Studenten werden in ihrem Beruf hauptsächlich mit Leuten zusammenarbeiten, die von der Mathematik etwas erwarten ohne sich für die Schönheit unserer Wissenschaft zu interessieren. Trotzdem scheint es, daß das an Substanzwissenschaften nicht gebundene mathematische Denken das Ziel des Studiums bleiben kann und soll. Dabei

muß offengelassen werden, ob das mathematische Denken nur in seinen Anwendungen in den Realwissenschaften wichtig ist, oder ob es selbst schon als Faktor in unserem sozialen Leben betrachtet wird, vergleichbar etwa dem juristischen Denken. Zur Zeit werden jedenfalls unspezifisch ausgebildete Mathematiker für sehr verschiedene Tätigkeitsbereiche gesucht. Die Mathematiker rechnen allerdings damit, daß sich gelegentlich Studiengänge von dem des Mathematikers abspalten, sobald die Reichweite des mathematischen Denkens innerhalb eines bestimmten Fachgebiets (vorläufig) abgesteckt worden ist.

Sie trösten sich aber mit der allgemeinen Überzeugung, daß mathematisches Denken in immer weitere Bereiche unseres Lebens Eingang findet. Aus dieser Vorstellung werden aber die verschiedensten Schlüsse für die Gestaltung des Studiums gezogen. Unter den für Lehrerbildung zuständigen Professoren scheint die Vorstellung verbreitet, man müsse zum Zwecke der Straffung und Popularisierung des Studiums die umständlichen speziellen Teile der Mathematik aus dem Lehrstoff ausmerzen und statt ihrer die Grundstrukturen betrachten. Einige neue Universitäten sind mit dem Anspruch angetreten, die Ausbildung des Mathematikers mit Hilfe ständiger Reflexionen auf die Anwendungssituation in unserer Gesellschaft auf moderne Füße zu stellen. An den klassischen mathematischen Instituten begegnet man aber solchen oder anderen Neubesinnungen mit Hohn, oder man beklagt sie als Anfang des Rückfalls in die Barbarei. Reflexionen über die Rolle der Mathematik verleugneten das mathematische Denken. Es sei genau und ausschließlich die Beschäftigung mit hochkarätiger Mathematik, die tüchtige Mathematiker erzieht. Sicher sei es die Reine Mathematik, welche die vollkommensten Blüten getrieben habe.

Die Aktivitäten der Abteilungen für Angewandte Mathematik können daher lediglich als Ergänzung akzeptiert werden;

dort sollen wohl die heute in der Praxis üblichen Verfahren besprochen werden. Für den Unterricht im mathematischen Denken fühlen sich jedenfalls die Reinen Mathematiker zuständig. Dies und der Mangel an qualifizierten Angewandten Mathematikern bringt es mit sich, daß auch die Anfängervorlesungen von Reinen Mathematikern gehalten werden; die Folge ist, daß dort große Mühe darauf verwendet wird, Handwerkszeug für die hohe Mathematik bereitzustellen. Über Ansatzpunkte mathematischen Denkens wird wenig gesprochen, von begrifflichen Schwierigkeiten erwartet man, daß sie in späteren Semestern als Scheinproblem erkannt werden. Dem Studenten wird als charakteristische Aktivität des Mathematikers das Gewinnen von Erkenntnissen durch Beweise dargestellt: In Bereichen des Lebens, wo gewisse Axiome zutreffen, gelten Gesetzmäßigkeiten, die man als Theoreme beweisen kann. Das Schlagwort von der zunehmenden Mathematisierung der Wissenschaften wird zur Ideologie: für Verhältnisse, die sich überhaupt wissenschaftlich erfassen lassen, wird auch eines Tages das passende mathematische System gefunden werden. Die reinen Mathematiker produzieren solche Systeme auf Vorrat, angetrieben von der Eigendynamik der Mathematik, die sich in der Vergangenheit immer wieder bewährt hat. Sie glauben es sich leisten zu dürfen, eventuelle gesellschaftliche Bezüge ihrer Forschung zu ignorieren, insbesondere das Problem ihrer eventuellen Anwendung der Nachwelt überlassen zu können.

Diese Vorstellungen von der Rolle der Mathematik und den innerwissenschaftlichen Zwängen überzeugen nur eine Minderheit unter den Studenten. Sie ist fasziniert von der Prägnanz der Argumentation und von der Objektivität der Richtigkeitskriterien; am liebsten möchte jeder von ihnen Professor für Reine Mathematik werden. Die Opposition der Mehrheit richtet sich zunächst einfach gegen das Tempo der Stoffvermittlung und gegen die Schwierigkeit der Übungsaufgaben; es bleibe keine Zeit und Kraft zur Orientierung. Diese Studenten fühlen sich in Gefahr, vom Studium ausge-

schlossen zu bleiben ("innerer numerus clausus"), wenn sie sich nicht Leistungsforderungen unterwerfen, die sie mit keinerlei Berufsperspektiven in Verbindung bringen können. Die einzelnen mathematischen Disziplinen erscheinen gleichsam als horizontlose Ebenen, auf welchen die Forscher in den verschiedensten Richtungen in Neuland vorstoßen, einfach deshalb, weil sie gelernt haben, ihre (Beweis-) Schritte sorgfältig zu setzen und damit Anerkennung finden. Es ist nicht plausibel, daß die heutige Mathematik der Forscher, die als das leider für den Studenten nur ansatzweise erreichbare Studienziel dargestellt wird, die Gesellschaft erreichen kann. Ehemalige Studenten verstärken diesen Zweifel, wenn sie berichten, daß sie höchstens noch mit einfacher Mathematik zu tun hätten und leider nie einen schlauen Beweis führen könnten. Sie fühlten sich aber auch aufgrund des Mangels an Überblick kaum dazu berufen, sich für modernere Techniken einzusetzen.

Nicht diejenigen, die Mathematiker beschäftigen, sondern aktive Gruppen von Assistenten und Studenten erwarten eine Verbesserung der Ausbildungssituation vom sogenannten Projektstudium. Dem Konzept liegt zunächst einmal die Vorstellung zugrunde, daß man von Studenten, die sich für den Beruf des Mathematikers entschieden haben aber nicht an mathematischer Forschung (im gegenwärtigen Sinn) teilnehmen wollen, erwarten kann, daß sie zu mathematischer Problemlösung motiviert sind. Das Selbstbewußtsein und die Durchschlagskraft des in die Praxis Strebenden soll gestärkt werden durch Studienleistungen, welche unter geeigneten Bedingungen unmittelbar gesellschaftlich relevant werden könnten; die Kooperation mit Substanzwissenschaftlern soll eingeübt und die strapaziöse Konkurrenzhaltung abgebaut werden. Weitere Folgen der Umgestaltung des Studiums sind durchaus erwünscht: die idealistische Ideologie von der Reinen Wissenschaft wird aus dem Studium verbannt; der Student erhält einen klaren Begriff von der Anwendbarkeit und den Grenzen der Anwendung der Mathematik; während des

Studiums kann mathematisches Potential aktiviert werden zur Lösung von Fragen, welche das Kapital nicht angreift. Die Befürworter des Projektstudiums haben bisher aber noch keine sie selbst befriedigende Antwort auf die Frage gefunden, wie man die genannten Lernziele mit konkreter nicht zu schmaler Stoffvermittlung verbinden könnte. Man hat feststellen müssen, daß auch gutwillige Professoren nicht in der Lage sind, geeignete Projektvorschläge zu unterbreiten.

Mitarbeit in einem interdisziplinären Forschungsprojekt könnte nach meiner Meinung vielleicht ein guter Ersatz für ein Nebenfachstudium sein; fachsystematische Schulung kann man aber kaum an Projektbearbeitungen anhängen. Ferner gibt man sich wohl einer Illusion hin, wenn man glaubt, reale Probleme seien im erwünschten Umfang mathematischer Bearbeitung zugänglich; der Weg von praktischen Problemen bis zur mathematischen Theoriebildung ist immer sehr lang gewesen. Es dürfte schließlich schwerlich Einigkeit zu erzielen sein, ob eine Lösung eines realen Problems wissenschaftlich begründet ist. Gewisse Ideen des Projektstudiums könnten wohl breitere Zustimmung finden, wenn dabei das Problem der Anwendung von Mathematik in unserer Gesellschaft realistischer gesehen würde. Man muß bestenfalls davon ausgehen, daß es wesentlich von den Interessen der Anwendenden bestimmt wird, wo die Grenzen der Anwendbarkeit einer Theorie liegen. Mathematische Methoden werden auch dort angewandt, wo des Mathematikers Frage nach Gültigkeit von Grundannahmen unbeantwortet bleibt (Warum sollte es aber z. B. mathematisch falsch sein, wenn auf nichtwiederholbare Prozesse Zeitreihenanalyse angewandt wird? Mit Anwendung meint man ohnehin oft nur, daß man neben ein reales Phänomen ein leichter durchschaubares Modell stellt, um den Blick zu schärfen für die Beobachtung des realen Phänomens.).

Die Gründe dafür, daß die Wirtschaft Mathematiker sucht, sind nicht auf einen Nenner zu bringen. Unkenntnis über die

Ausbildung spielt sicher eine Rolle. Es kann nicht ausgeschlossen werden, daß es manchmal (in einem gewissen Sinne) ökonomisch ist, daß Mathematiker gar nicht als Wissenschaftler eingesetzt werden, daß sie etwa damit beschäftigt werden, starre Verfahren auf immer größere Datenmengen auszudehnen ohne Spielraum für kritische Prüfung und Fortentwicklung. Firmen, die schon länger Mathematiker beschäftigen, stellen Mängel der Ausbildung fest; sie vermissen weniger konkrete Kenntnisse als vielmehr die Fähigkeit oder Bereitschaft zur Kooperation mit Nichtmathematikern. Sie glauben, daß auf besser ausgebildete Mathematiker interessante Aufgaben warten. Sie fühlen sich aber nicht kompetent von sich aus konkrete Reformvorstellungen zu entwickeln.

Spekulationen über die Möglichkeiten scheinen nötig: Vom Mathematiker wird man nach meiner Einschätzung in erster Linie erwarten, daß er inhaltlicher Argumentation von Praktikern folgen kann, kritische Vorstellungen, an welche diese sich unter möglicherweise verschiedenen Bedingungen gewöhnt haben, hinterfrägt und abschätzen kann, welche Konsequenzen für die Rechnungen eine Modifikation dieser Vorstellungen hätte; schließlich wird von ihm verlangt werden, daß er eine von den Praktikern anvisierte Lösung in algorithmische Form bringen kann. Es wird dem Mathematiker dagegen nach meiner Einschätzung in den seltensten Fällen gelingen, ein deduktives System ausfindig zu machen, dessen Grundannahmen der Erfahrung zugänglich sind und dessen Theoreme den Praktikern weiterhelfen. Wenn man aber nicht das Entwerfen deduktiver Systeme als das zentrale Betätigungsfeld für den mathematisch geschulten Verstand ansieht, dann steht die Bedeutung der Ausbildung im Fortschreiten innerhalb abgeschlossener mathematischer Systeme in Frage. Der Mathematiker muß dann wohl vor allem ein Verhältnis zu den Ergebnissen seiner Wissenschaft gewinnen, welches ihm erlaubt, diese auch Nichtmathematikern zu explizieren. Er muß darlegen können, warum gewisse

Fakten, die vielleicht dem Praktiker wesentlich erscheinen, für die fragliche Konklusion irrelevant sind, er muß nach fehlenden Informationen fragen können und dergleichen.

Im heutigen Mathematikstudium werden solche Fähigkeiten kaum entwickelt. Die Formelsprachen beherrschen die Kommunikation, die Ansatzpunkte gehören als "Prämathematik" nicht zum Lehr- und Prüfungsstoff (Merkwürdigerweise beklagen dieselben Studenten mangelnde Motivation der Ableitungen, die bei allgemeinen Erörterungen unaufmerksam sind, weil sie nach ihnen in der Prüfung nicht gefragt werden.). Der wahre Mathematiker fühlt sich gezwungen, das Problem in der Sprache zu formulieren, die auch das Medium der Lösung ist, weil er nur so das minimale System von Voraussetzungen genau fassen kann. Es bleibt auch kein Platz, verschiedene Standpunkte zum gleichen Problem darzulegen. Erst im Bereich der aktuellen Forschung wird gelegentlich eine spezifische Anschauungsform entwickelt, in welcher Lösungsstrategien konzipiert werden, und ein bildhafter Jargon, in welchem Vermutungen und Beweisideen ausgedrückt werden können. Es gilt aber unter Reinen Mathematikern als unfein, vor Studenten und Nichtspezialisten etwas anderes auszubreiten als zugunsten der formalen Absicherung sterilisierte Überlegungen. Die von den Reinen Mathematikern verwöhnten Studenten zeigen dann wenig Neigung, die Formelsprache mit einer kontrollierten Umgangssprache zu verbinden. Das ist schon deshalb bedauerlich, weil viele allgemeine Einsichten, die wir der Mathematik verdanken, aus dem Blickfeld schwinden (z. B. die, daß zufällige Größen andere Charakteristika besitzen als unbekannte oder die, daß die Potenz eines Automaten in faßbarer Weise beschränkt ist).

Nach meiner Erfahrung bieten sich in der Lehre der Angewandten Mathematik Chancen. Die Wahrscheinlichkeitstheore-

tiker beispielsweise pflegen eine in ständiger Vermittlung mit der Sprachebene der kanonisierten Begriffe stehende nichtformale Sprache, die sich zur Kommunikation mit Nichtmathematikern eignet (Zufallsereignisse und Zufallsgrößen sind Grundterme dieser Sprache, nicht aber meßbare Funktionen.).

Eine Chance für die bessere sprachliche Qualifizierung der Studenten ergibt sich sicher auch, wenn demnächst die endliche Mathematik (wegen ihrer wachsenden praktischen Bedeutung) in die Lehrpläne aufgenommen wird. Man vergibt die Chance natürlich, wenn man die Studenten gängelt, z. B. mit starren Definitionen für Graphen, Wege, etc. oder sie auf schwierige Sätze der Färbungstheorie hetzt; es kommt darauf an, daß das Sprechen über die intuitiven Begriffe der Kombinatorik langsam die Präzision gewinnt, welche das hier oft heikle mathematische Schließen verlangt. Das Schwierige und didaktisch Wertvolle sind die Entscheidungen in bezug auf die Übergänge zwischen den Sprachebenen: wie man das Problem umgangssprachlich präzisiert, formalisiert, wie man modelliert, dann 'löst' und schließlich das Resultat interpretiert.

Die in unserer Spekulation anvisierten Qualifikationen erfordern neben einer flexiblen Sprache einen gewissen Wissensschatz von einfachen Modellvorstellungen. Diese Vorstellungen brauchen nach meiner Meinung nicht an realen (im Sinne von gesellschaftlicher Bedingtheit) Problemen entwickelt zu werden. Viele plausible und einige zunächst paradox erscheinende Resultate der Stochastik lassen sich mit Spekulationen verdeutlichen, die von den zuständigen Substanzwissenschaftlern nicht voll akzeptiert werden. Ich denke z.B. an Brown'sche Bewegung, stochastische Dynamiken, Staudämme, gewisse Verzweigungsprozesse in der Genetik, Ansteckungsphänomene u. dgl. Im gegenwärtigen Unterrichtsstil droht dem mathematischen Denken Gefahr, wenn solche Vorstellungsweisen nur noch als be-

liebig herausgegriffene 'Anwendungen' von allgemeinen mathematischen Sätzen erschienen.

Der 'problemorientierte' Unterricht scheint vielleicht auf den ersten Blick die gebotene Form der Lehre: man verzichtet auf deduktiv aufgebaute Theorien und entwickelt die Techniken anhand von Problemen, die in natürlicher Sprache beschrieben sind. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie hat ein ziemlich perfekter Test gezeigt, daß dieses Vorgehen didaktisch nicht günstig ist: Praktisch konkurrenzlos kam 1950 Feller's berühmte 'Introduction ...' auf den Markt; sie wurde von vielen Nichtmathematikern begeistert aufgenommen, sie genießt unter Spezialisten noch heute höchstes Ansehen, viele Versuche aber, Studenten mit diesem Buch auszubilden, sind gescheitert; die Studenten erkennen anscheinend keine Ordnungsprinzipien und leiden unter Orientierungslosigkeit; sie nehmen die Herausforderung, mathematischen Stoff für sich selbst zu organisieren, frühestens bei der Diplomarbeit auf.

Die fast paradoxe Aufgabe lautet nach meiner Meinung: Man unterrichte eine Theorie so gut deduktiv gegliedert, daß sie für den Studenten überschaubar wird und gleichzeitig so in Wechselwirkung mit den Problemen, daß gelernt wird, die Umgangssprache zu präzisieren zu einer flexiblen Fachsprache, die einerseits das Skizzieren von Beweisen ermöglicht, andererseits jederzeit wieder vergröbert werden kann für das Gespräch mit Nichtmathematikern.

Die Chancen zu nützen, die nach unserer Meinung der Unterricht in Angewandter Mathematik bietet, wird viel Energie kosten. Die heute üblichen Vorstellungen von Forschung und Lehre begünstigen solche Bestrebungen nicht. Der junge Mathematiker bekommt nämlich leichter Kredit, wenn er ein technisch schwieriges Stück entlang eines bekannten Wegs meistert, als wenn er neue wichtige Probleme der mathematischen Behandlung erschließt, dabei

aber nicht auf diffizile Techniken stößt. Zudem setzt er sich der Gefahr des Scheitern aus, wenn er die zum Problem passenden Techniken erst suchen will. Die geläufigen Techniken stetig (auf Vorrat) weiterzuentwickeln, ist gefahrloser. Die meisten Vertreter der Angewandten Mathematik konzentrieren daher heute wie die Reinen Mathematiker ihre Kraft hauptsächlich darauf; der junge Mathematiker kann mit einer schnell wachsenden Publikationsliste rechnen, der etablierte Professor stößt in der nötigen Frequenz auf Themenvorschläge für Diplomarbeiten u. dgl..

Die Diskussion um die Prioritäten innerhalb der Mathematik ist in den letzten 15 Jahren infolge der generellen Expansion der Universitätsmathematik unterblieben. Es kommt den Mathematikern heute wohl hauptsächlich auf die Raffinesse der Schlüsse an; Ernsthaftigkeit der Motivation von Problemen und Nützlichkeit von Lösungen werden als außermathematische schwammige Kriterien verachtet. Ich vermute, daß jetzt die Zeit der Überspezialisierung ihrem Ende zugeht, daß elementare Ansätze von fächerverbindendem Charakter bald höher eingeschätzt werden und, daß sich die Forschung mehr um konkrete Algorithmen kümmern wird, z.B. mit Untersuchungen über Robustheit. Wenn man, um großartige Mathematik machen zu können, von groben Modellen zu differenzierten Systemen von Axiomen übergeht, läuft man Gefahr, diejenigen Feinheiten des Modells übermäßig auszuschlachten, die in der zu beschreibenden Situation nur approximativ erfüllt sind; die Ergebnisse sind dann vielleicht weniger adäquat und jedenfalls schwerer zu kritisieren als die des gewöhnlichen Hausverstandes. Techniken, die diese Gefahr vermeiden, heißen robust.

Aus den hier vorgetragenen Spekulationen ergeben sich die folgenden Forderungen:
1) Der Studienanfänger darf nicht auf die Vorstellung

eingeschworen werden, daß der Mathematiker nur in der Konstruktion großer deduktiver Systeme seinen Platz findet.

2) Der Drang von realen Problemen nach 'mathematisch korrekter Behandlung' sollte nicht überschätzt werden.

3) Die Umgangssprache darf aus der Mathematik nicht verdrängt werden; sie muß den Bedürfnissen entsprechend verfeinert werden. Die Vermittlung zwischen den Sprachebenen muß gelehrt werden.

4) Elementare Modellvorstellungen müssen gelehrt und geprüft werden.

5) Bei der Wahl eines bestimmten deduktiven Aufbaus einer mathematischen Theorie muß das Ziel berücksichtigt werden, Wissen so zu organisieren, daß es auch dem natürlichen Sprechen zugänglich bleibt.

6) Die Diskussion um die Qualität mathematischer Forschung darf die Frage nach der Bedeutung der Resultate außerhalb der Systematik nicht länger ausklammern.

BUCHBESPRECHUNG

Zur Kognitions- und Curriculumtheorie

Rezension von: J.S. Bruner RELEVANZ DER ERZIEHUNG

Otto Meier Verlag, Ravensburg, 1973

von H.N. Jahnke
und Th. Mies

Jerome S. Bruner spielt in der didaktischen Diskussion in den USA eine hervorragende Rolle, die sich sowohl auf seine Beiträge zur Kognitionspsychologie stützt, als auch direkt auf seine Vorschläge zur Curriculum-Revision zurückgeht. Die unter dem Titel 'Relevanz der Erziehung' 1973 erschienene Sammlung von Aufsätzen gibt einen aufschlußreichen Einblick in Bruners wissenschaftliche Arbeit und zwar gerade unter dem Gesichtspunkt des Zusammenhangs seiner denkpsychologischen und curriculumtheoretischen Vorstellungen. 'Relevanz der Erziehung' umfaßt neun Aufsätze aus den Jahren 1965 - 1970, die unter psychologischen, pädagogischen, sozialen und politischen Gesichtspunkten die Bedeutung von Erziehung beleuchten.

I. Dreh- und Angelpunkt der Überlegungen Bruners ist die These, daß die kognitive Entwicklung des Individuums

in entscheidendem Maße zu verstehen ist als Erwerb der Fähigkeit, mit den gesellschaftlichen Instrumenten des Handelns (Werkzeuge), der Wahrnehmung (Bilder, Signale etc.) und des Denkens (Sprache, Wissenschaft) umzugehen und sie anzuwenden. Diese These gestattet es Bruner, eine Vielfalt von Ergebnissen der kognitionspsychologischen und didaktischen Forschung aufeinander zu beziehen, auf die besondere Bedeutung der These für die Pädagogik sei durch die folgenden Formulierungen vorläufig hingewiesen: "Eine auffallende Besonderheit der Spezies Mensch besteht darin, daß bei ihr die Entwicklung des Individuums von der Geschichte seiner Artgenossen abhängt - von einer Geschichte, die nicht in Genen und Chromosomen aufgezeichnet ist, sondern vielmehr in einer Kultur, die außerhalb der menschlichen Zellen existiert und deren Horizont weit über die Fähigkeiten, die in einem Einzelnen verkörpert sind, hinausreicht. Die Entwicklung des Verstandes ist daher immer eine Entwicklung, die von außen mitgetragen wird. Und in dem Maße, in dem eine Kultur die Grenzen der individuellen Kompetenz überschreitet, werden definitionsgemäß die Grenzen für die individuelle Entwicklung weit über das hinausgeschoben, was ein einzelner in dem zuvor bestehenden Zustand je hätte erreichen können" (S. 80). Und die Folge ist: "Der Intellekt des Menschen ist nicht einfach seine eigene Angelegenheit, sondern er ist in dem Sinn gemeinschaftsbezogen, daß seine Erschließung oder Leistungsverstärkung davon abhängt, welchen Erfolg die Kultur dabei hat, Mittel für diesen Zweck zu entwickeln" (S. 24).

Bruner sieht seine Auffassungen gestützt durch die neuesten Forschungen zur Frühgeschichte des Menschen, durch psychologische Experimente und Untersuchungen zur Kulturabhängigkeit der kognitiven Entwicklung und

durch die Entwicklungstrends in der Methodologie der Wissenschaft generell.

Inzwischen scheint es nämlich erwiesen zu sein, "daß für das Fortschreiten in der Evolution der menschlichen Intelligenz die Ausprägung des aufrechten Gangs und des Werkzeuggebrauchs bei den frühen Hominiden als Voraussetzungen notwendig war" (S. 25). Und es war "nicht ein Hominid mit großer Gehirnsubstanz ..., der die technisch-soziale Lebensweise des Menschen entwickelte, sondern" es war "vielmehr das werkzeugbenutzende kooperative Verhaltensmuster ..., das allmählich die Morphologie des Menschen veränderte, ..." (S. 26).

Auch die experimentellen Ergebnisse der Denkpsychologie, (an denen Bruner und seine Schule großen Anteil haben), bestätigen, daß die Entwicklung der menschlichen Intelligenz sehr weitgehend kulturspezifisch ist. Die diesbezüglichen Ergebnisse faßt Bruner in Kapitel 2 'Kultur und kognitive Entwicklung' zusammen.

Kulturspezifische Unterschiede hinsichtlich der Wahrnehmung sind bereits in älteren Untersuchungen festgestellt worden. So fallen etwa die Todas in Indien bestimmten optischen Täuschungen nicht anheim, weil sie nicht gewöhnt sind, von zweidimensionalen Darstellungen auf dreidimensionale Beziehungen zu schließen. Und Experimente mit den Chukchee ergeben, daß die Auswahlprinzipien der Wahrnehmung bei komplexer Reizangabe von Kultur zu Kultur variieren (S. 44/45). Bei seiner Darstellung der kulturspezifischen Determination der Intelligenz konzentriert sich Bruner aber vor allem auf den Einfluß sprachlicher Strukturen auf die Ausbildung kognitiver Fähigkeiten. Er geht dabei von der sogenannten Sapir-Whorf-Hypothese in ihrer lexikalischen Fassung aus, deren Mängel er an dem vorliegenden empirischen Material überzeugend demonstriert. "Unsere Ergebnisse führten uns von

der Vorstellung einer einfachen Entsprechung im Sinne von Whorf weg zu einem Instrumentalismus, wie er typisch ist für Vygotski (1961) und Luria (1961)" (S. 45). Damit stellt Bruner sehr aufschlußreiche Beziehungen zwischen der vor allem in den angelsächsischen Ländern geführten Diskussion um die Sapir-Whorf-Hypothese und einer innerhalb der sowjetischen Psychologie sehr einflußreichen Schule her, die Sprache unter dem Gesichtspunkt ihrer Funktion als gesellschaftliches Werkzeug analysiert.

Bruner diskutiert im Kapitel 2 detaillierter, welche unterschiedlichen Konsequenzen eine 'kollektive' im Unterschied zu einer 'mehr individualistischen Wertorientierung' für die kognitive Entwicklung hat. 'Individualistische Wertorientierung' sei dabei diejenige Einstellung des Denkens, welche in industrialisierten Gesellschaften vorherrscht, die mit der Einsicht verbunden ist, daß Sachverhalte je nach Standpunkt verschieden erscheinen können, die zwischen Individuum und Gesellschaft sowie zwischen physikalischen und sozialen Ursachen unterscheiden kann. Die 'kollektive Orientierung' hingegen wird etwa bei den Eskimos oder bei den Wolof im Senegal angetroffen und besitzt im Hinblick auf diese Unterscheidungen eine wesentlich geringere Fähigkeit zur Reflexivität. Es sollen hier nicht die Überlegungen Bruners im einzelnen dargelegt, sondern nur das wohl unbestreitbare Ergebnis festgehalten werden: "Herrschaft über die Welt der Dinge und individuelles Bewußtsein treten in einer Kultur zugleich auf - im Gegensatz zu einer Kollektivorientierung und einer realistischen Weltansicht, bei der die Einstellungen und Handlungen der Menschen nicht in begrifflichen Klassifizierungen untergebracht werden, die von physikalischen Ereignissen getrennt sind" (S. 54). Ebenso kann die Bedeutung von Schule und von geschriebener Sprache als Ausdruck und als Instrument eines höheren Niveaus der Naturbeherrschung für die

Ausbildung der Fähigkeit zu abstraktem Denken gar nicht hoch genug eingeschätzt werden (vgl. S. 75 ff).

Der 'instrumentelle Konzeptualismus', wie Bruner seine Auffassung in 'Studien zur kognitiven Entwicklung' bezeichnet, soll noch an einem dritten Komplex, der direkt für die Curriculum-Theorie wichtig ist, erläutert werden, nämlich der Rolle und Bedeutung von Wissen und Wissenschaft.

"Die vielleicht größte Veränderung, die sich in ihren Grundlagen aus der Revolution der Physik herleitet, besteht in unserer Vorstellung davon, was eine Theorie ist. ... Wir wissen heute, daß Theorie weit mehr ist als eine Aussage darüber, was geschehen oder nicht geschehen könnte. ... Explizit oder implizit schließt sie immer ein Modell dessen ein, worüber sie theoretisiert, eine Reihe von Annahmen, die zusammengenommen ursachenbezogene Voraussagen über einen Gegenstand machen " (S. 34).

Betont man den Modellcharakter wissenschaftlicher Theorien, so muß dies nicht in Richtung einer geringeren Verbindlichkeit und eines größeren Relativismus weisen; eine solche Betonung klärt vielmehr die wachsende Bedeutung, die einem angemessenen Verständnis der Methodologie für die Wissenschaft zukommt. "In der Tat überwinden wir den Relativismus durch die Erfindung von Techniken der Kalibrierung, die eine arbeitsfähige Grundlage für den einfachen Umgang mit Ereignissen bieten - Techniken der Schlußfolgerung, der Überprüfung von Hypothesen, der Sample - Bildung, Techniken zum Bestimmen und Korrigieren von Inkonsistenzen und Widersprüchen usw." (S. 167).

Demgemäß finden sich im ganzen Buch Überlegungen, die das Verhältnis von Wissen und Aktivität betreffen, die die Funktion des Wissens als Handlungsorientierung herausar-

beiten ebenso wie die Bedeutung von Verhaltensweisen und Techniken wissenschaftlicher Arbeit als Quelle unseres Wissens: die Notwendigkeit, über Mögliches genau so nachzudenken wie über Wirkliches, die Anwendung impliziter Regeln über das Vernachlässigen gewisser Informationen bzw. über den Teilgebrauch verfügbarer Information; aber auch die Wichtigkeit strikter Analyse, permanenter disziplinierter Kontrolle wissenschaftlicher Arbeit. Die Entwicklung der Wissenschaft selbst bestätigt, so scheint es, zunehmend ihre instrumentelle Betrachtungsweise. "Aufgrund dessen wird auch die Theorie eher zu einer Notwendigkeit als zu einem Luxus " (S. 164).

Es ist hier der Punkt erreicht, an dem zwei berühmte Thesen Bruners zur Curriculumreform verständlich werden, die These nämlich, daß es notwendig sei, die grundlegenden Strukturen und fundamentalen Ideen der jeweiligen Disziplin zum Gegenstand des Unterrichts zu machen, und die These, daß jedes Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden kann (vgl. S. 38, S. 163; und J.S. Bruner, Der Prozeß der Erziehung, Berlin, Düsseldorf 1972, S. 44).

Offenbar hängen beide Thesen eng zusammen und in der Tat zielen sie auf ein und denselben Sachverhalt, der bereits zu Beginn formuliert wurde: Wenn Lernen und kognitive Entwicklung zu verstehen sind als Erwerb der gesellschaftlich hervorgebrachten und übermittelten Instrumente und Verstärker der Wahrnehmung, des Denkens und des Handelns, dann sind die Ziele der Erziehung grundsätzlich zu orientieren am fortgeschrittensten Niveau der Entwicklung dieser gesellschaftlichen 'Werkzeuge', dann ist eben die gesamte Ausbildung von diesem entwickeltsten Niveau aus zu bestimmen und zu strukturieren. Die Notwendigkeit und die Möglichkeit dieser Orientierung wird in den beiden Thesen ausgesagt. Ihre Bedeutung liegt unseres Erachtens

nicht so sehr in der Aussage, die sie unmittelbar machen, sondern darin, daß sich aus ihnen einschneidende Konsequenzen für den gesamten Komplex pädagogischer Forschung und Praxis ergeben.

Das Problem, das sich stellt, formuliert Bruner sehr schön folgendermaßen: "Ich habe es einmal so beschrieben, daß der für die menschliche Gattung typische Weg, geistiges Vermögen zu vermehren, in der Umwandlung besteht; der Umwandlung von außerhalb liegenden Wissensbereichen, die in die Kultur eingebettet sind, in generative Regeln, nach denen wir über die Welt und über uns selbst nachdenken."

Bruner sieht mindestens drei Schlußfolgerungen:

Einmal sieht er die Notwendigkeit der führenden Rolle der Fachwissenschaft für die Didaktik der einzelnen Disziplinen. Er wird daher nicht müde zu betonen, wie wichtig es sei, daß die führenden Wissenschaftler eines Gebietes an der Entwicklung von Curricula mitarbeiten. Ihre Kenntnisse und Erfahrungen der Arbeitsweise der entsprechenden Wissenschaft sind unabdingbar: "Denn die grundlegende Annahme ist die, daß Physik nicht so sehr das Thema ist als vielmehr die Art und Weise des Denkens, daß sie mehr ein Apparat ist, der Wissen über die Natur aufbereitet, als eine Sammlung von Fakten, die man aus einem Handbuch herausholen kann " (S. 146).

Zweitens ergibt sich die Forderung nach strikter Interdisziplinarität der curriculumtheoretischen Forschung: "Aber ich bin fest davon überzeugt, daß der Psychologe allein nicht in der Lage ist, eine Theorie darüber aufzustellen, wie man die kognitive Entwicklung stützen kann, und daß er auch nicht alleine lernen kann, wie man die Möglichkeiten des menschlichen Verstandes bereichert und verstärkt. Diese Aufgabe ist allen intellektuellen Gruppen gestellt: Verhaltenswissenschaftlern wie Künstlern, Natur- und Geisteswissenschaftlern,

allen, denen Fertigkeiten, Geschmack und Wissen in unserer Kultur anvertraut sind " (S. 97/98).

Drittens stellt sich das Problem, bei der Konstruktion von Curricula mit der Trennung von Wissen und Handlung fertigzuwerden, wie sie in arbeitsteiligen Gesellschaften mit spezialisierter Erziehungs- und Forschungsinstitutionen besteht.

II. In der Kognitionspsychologie hat Bruner eine Theorie entwickelt, derzufolge der Mensch über drei Möglichkeiten der Darstellung von Sachverhalten verfügt, einer handlungsmäßigen, einer bildhaften und einer symbolischen. In Anlehnung an und in Abgrenzung von Piaget betrachtet er diese drei Möglichkeiten als aufeinander folgende Etappen in der geistigen Entwicklung des Kindes einerseits und als beim Erwachsenen koexistierende Darstellungsebenen andererseits. Danach wird die kognitive Entwicklung wesentlich vorangetrieben durch Widersprüche, die sich zwischen diesen drei Darstellungsebenen ergeben. Diese Theorie wird in der Didaktik dann so umgesetzt und operationalisiert, daß zum Erlernen eines Sachverhalts dieser sukzessiv handlungsmäßig, bildhaft und symbolisch dargestellt wird (vgl. S 163).

Bruner sieht den Zusammenhang der drei Medien so, daß sie alle drei Manifestationen einer angeborenen, ursprünglichen symbolischen Tätigkeit seien. Die Analyse des konkreten Zusammenwirkens der drei Medien auf allen Entwicklungsstufen des Lernprozesses, die Widersprüche und Zusammenhänge bzw. Kontinuitäten einschließen müßte, wird bei Bruner unzureichend entwickelt. Dies scheint auch der Grund zu sein, warum die didaktischen Konsequenzen der Theorie nicht über die Empfehlung, drei Medien der Darstellung zu benutzen, hinausgehen.

Diese Beschränkung in der Analyse scheint uns aus einer

Einstellung herzurühren, die Bruner selbst mit großer Ambivalenz so charakterisiert hat: "Es ist für den Psychologen immer schwierig, sich vorzustellen, daß etwas in einer Kultur 'existiert' - oder wie immer man die Gegenwart von Eigenschaften und Fertigkeiten, die das individuelle Leben oder sogar eine Generationsspanne überschreiten, ausdrücken mag. Psychologische Theorien sind wesentlich akulturell und ahistorisch. ... Wir sind, Gott sei's geklagt, in der Idee befangen, daß die menschliche Wirklichkeit innerhalb der Grenzen der menschlichen Haut existiert!" (Bruner, Olver, Greenfield, Studien zur kognitiven Entwicklung, Stuttgart 1971, S. 379, Fußnote 1)

III. Gegen Piaget besteht Bruner auf der überragenden Bedeutung der Gesellschaft für die kognitive Entwicklung des Menschen. Als ein wesentliches Moment der Gesellschaftlichkeit des Menschen ist die Sprache anzusehen. Ihre Beziehungen zu kognitiven Prozessen werden demgemäß von Bruner im sehr bemerkenswerten Abschnitt 'Sprache und kognitive Entwicklung' (S. 59 - 76) detailliert behandelt. Danach ist ein Einfluß von sprachlichem Kodieren auf Erinnerungs- bzw. Problemlöseaufgaben nachweisbar in dem Sinne, daß die Lösung unterstützt wird, wenn die sprachliche Verschlüsselung der Spezifität der Aufgaben angemessen ist, und im anderen Fall behindert wird. Die lexikalische Fassung der Hypothese von Whorf konnte nicht bestätigt werden: Die Fähigkeit, Objekte nach verschiedenen Kriterien zu klassifizieren, hängt nicht davon ab, ob das Kriterium direkt in der Sprache benannt werden kann, also nicht vom lexikalischen Reichtum einer Sprache, sondern eher von der Tiefe und Differenziertheit der hierarchischen Struktur der Sprache in dem betreffenden Sachbereich. Insbesondere ergibt sich die Fähigkeit, das Klassifizierungskriterium zu wechseln, sehr stark aus der Verfügbarkeit ganz allgemeiner Oberbegriffe und ihrer Verankerung in

der hierarchischen Struktur. Es zeigt sich ferner, daß die Schule und vor allem das Erlernen einer Sprache, die geschrieben wird, ganz eminent zur Herausbildung einer differenzierten Grammatik und eines klassifizierenden und hierarchisierenden Denkens beitragen. "Alle unsere Ergebnisse durchzog die Wiederkehr desselben Themas. Immer wieder bewirkt die Variable 'Schule' qualitative Unterschiede in der Ausrichtung des Wachstums " (S. 75).

Es sei noch bemerkt: eine ganze Reihe von experimentellen Ergebnissen bei Bruner verweisen auf die fundamentale Bedeutung der Tätigkeit, die in Verbindung mit sprachlichen Äußerungen zu großen Lernerfolgen führt (siehe etwa: Studien zur kognitiven Entwicklung, Kap. IX, Kap. X). Von daher ist es nicht ganz einsichtig, warum Bruner in so starkem Maße Piagets Auffassung, die Begriffe auf Aktionen und Operationen zurückführt, relativiert.

IV. Aktivität steht im Mittelpunkt der Überlegungen Bruners zur Unterrichtstheorie. "Wenn man Physik lernt, lernt man Möglichkeiten, mit Vorgegebenem zu hantieren, Dinge miteinander zu verbinden; Dinge, die nicht aufeinander bezogen sind, so in Zusammenhang zu bringen, daß eine einsehbare Ordnung entsteht. Man lernt Möglichkeiten, Sachverhalte, die man beobachtet, auf die man stößt, so zueinander in Beziehung zu setzen, daß ihre Redundanzen hervorgehoben werden, und sie dadurch so einleuchtend wie möglich zu machen. Um eine inzwischen Gemeingut gewordene Formulierung zu gebrauchen: es handelt sich um eine Methode des Lernens, deren Schwerpunkt darauf liegt, von der Oberfläche einer Beobachtung zu der grundlegenden Struktur eines regelhaften Zusammenhangs zu gelangen " (S. 147). Wie bereits dargelegt, gründet sich eine solche Auffassung sowohl auf ein Verständnis wissenschaftlicher Theorie, das wachsendes Gewicht auf ihren instrumentellen Charakter und ihre Methodologie legt, als auch auf

fundamentale Einsichten der Kognitionspsychologie. Die Alternative, entweder einen Kanon von Wissen oder allgemeine Strategien des Problemlösens zu lehren, vermeidet Bruner. Er versucht, eine pädagogische Theorie zu entwickeln, die vom Zusammenhang von Wissen und Handeln ausgeht, ohne beides aufeinander zu reduzieren. "Wenn Wissen nützen soll, muß es bündig zusammengefaßt, zugänglich und gut handhabbar sein. Die Theorie ist die Form, die diese Eigenschaft besitzt. Sie sollte das Ziel unseres Lehrens sein" (S. 145). Und es scheint, als habe sich für Bruner von 'Der Prozeß der Erziehung' bis zu 'Relevanz der Erziehung' der Akzent noch mehr in Richtung 'Methodologie' und 'Wissenschaft als Tätigkeit' verschoben. Bruner ist klar, daß zur Lösung verschiedener Probleme verschiedenes Lösungsverhalten erforderlich ist. Es gibt keine universellen Lösungsstrategien, aber es gibt mathematische, physikalische, chemische etc. Kompetenz. Die muß erworben werden.

Bei einem solchen Ausgangspunkt für eine Unterrichtstheorie ist eine Untersuchung des Unterschieds und der Beziehung zwischen intuitivem und analytischem Denken notwendig. Bruner widmet dieser Frage ein ganzes Kapitel (Kap. 5). Sicher sind seine dort getroffenen Feststellungen noch beschreibend und vorläufig. Es scheint uns aber ein wichtiger Ansatz zu sein, daß er die übliche Entgegensetzung von intuitivem und analytischen Denken nicht mitmacht, nicht intuitives Denken mit zufälligem, ungesteuertem Produzieren von Einfällen identifiziert und analytisches Denken mit absoluter Folgerichtigkeit. "Denn die generelle Aussage, daß Intuition immer vage und Analyse immer streng sei, läßt sich nicht halten." (S. 122). Daher versucht er, für intuitives und analytisches Denken Merkmale und Wesenszüge herauszuarbeiten, die in Unterrichtsziele umsetzbar sind. "Es dürfte klar geworden sein, daß das Ziel eines ausgewogenen Unterrichts darin besteht, das

Kind zu befähigen, daß es je nach Notwendigkeit intuitiv vorgeht oder analysiert" (S. 117).

Bruner meint in diesem Zusammenhang auch das Problem der Lernmotivation lösen zu können. Seine These ist: "Es ist anzunehmen, daß die Belohnung, die aus dem Umgang mit Material erwächst, aus der Entdeckung von Regelbeziehungen, aus dem Extrapolieren usw. wesentlich ist in bezug auf die Aktivierung. ... Von außen kommende Belohnungen können diese Freude zudecken" (S. 110). Sicher ist richtig, daß grundsätzlich das Problem der Motivierung überhaupt erst entsteht aus der Trennung von Aktivität und Wissen und daher prinzipiell nur über ihre Verbindung zu lösen ist. Dazu allerdings die angemessenen Formen zu entwickeln, bleibt ein Problem, das durch die Brunersche These nicht gelöst ist, zu dem sie aber gewisse Orientierungen gibt. Es ist auffällig, daß Bruner zu einem Problem sich nicht äußert, obwohl dieses eine wesentliche Bedingung schulischen Lernens darstellt: zur Rolle der Kooperation. Das ist umso erstaunlicher, als gerade Bruner in besonderem Maße die gesellschaftlichen Momente des Lernprozesses im Auge und offensichtlich die Kooperation auch für das Problem der Motivation eine große Bedeutung hat.

Berücksichtigung der Kooperation scheint uns aber noch aus einem weiteren Grund zentral zu sein: Als logische Konsequenz seines Ansatzes legt Bruner großen Wert auf das Training im hypothetischen Denken, Denken mehr über Mögliches als über Wirkliches, auf Schließen von unvollständigen Informationen her usw. Er formuliert weiter als wichtiges Prinzip des Unterrichts, das des gelenkten Kontrastes, des Widerspruchs also, der richtige Einsicht befördert, von Fehlern, die zur Lösung führen. Genausowenig wie in der Wissenschaft die entsprechenden Verfahren Erfolg haben könnten ohne die Kooperation der Wissenschaft-

ler untereinander und mit der Gesellschaft, genausowenig scheinen sie im Lernprozeß sinnvoll oder auch nur denkbar zu sein, ohne durch Kooperation stimuliert, aber auch vor allem kontrolliert zu werden. Die Fähigkeit, durch solche notwendige Verwirrung hindurch das Richtige festzuhalten, ist für den einzelnen nur schwer zu erlernen und in einem allgemeinen Sinne sogar unmöglich, worauf nicht zuletzt Piaget in seinen Arbeiten zur Herausbildung des operativen Denkens hingewiesen hat.

V. Das Thema "Relevanz der Erziehung" wäre nun sehr unvollständig und oberflächlich behandelt, wollte man es auf kognitionspsychologische bzw. unterrichtsinterne Gesichtspunkte beschränken. Um Erziehung zu betreiben, braucht man mehr, z.B. eine Theorie der Schule. Und Bruner stellt fest: "Wir haben eindeutig keine Theorie über die Schule, die der Aufgabe genügt, Schule zu betreiben - ..." (S. 97). Auch Bruner hat diese Theorie nicht. Trotzdem finden sich in "Relevanz der Erziehung" zahlreiche Hinweise dazu. Bruner sieht auch dieses Problem unter dem allgemeinen Aspekt der Trennung von Wissen und Aktivität: das Lernen wird in der Schule aus dem gesellschaftlichen Lebensprozeß herausgenommen. Aber Bruner ist sich auch bewußt, daß es kein Zurück zu einem "Naturzustand" gibt. Vielmehr gilt es ja gerade herauszuarbeiten, warum die Schule eine so ungeheuer nützliche und effektive Einrichtung ist, so unvollkommen sie auch im einzelnen arbeiten mag. Und so, wie er den Nutzen abstrakten Denkens formuliert: "Denken ist somit eine stellvertretende Handlung, in welchem der hohe Preis eines Irrtums erheblich reduziert wird" (S. 23), so kann er auch sagen: "Dadurch, daß Lernen in die Schule verlegt wird, wird es aus dem unmittelbaren Handlungszusammenhang herausgelöst. Dieses Herauslösen macht Lernen zu einer eigenständigen Handlung, die frei ist von unmittelbaren Handlungszielen und die Lernende auf die Kette

der Gedankenschritte vorbereitet, die, ohne sofortige Belohnung zu erfahren, zur Formulierung komplexer Vorstellungen notwendig sind. Gleichzeitig befreit die Schule (wenn sie erfolgreich ist) das Kind vom Schritt für Schritt des Trotts in der täglichen, konkreten Arbeit. Die Schule kann zu einem großen Förderer der Reflexionsfähigkeit werden, wenn es ihr gelingt, selbst diesen grauen Trott zu vermeiden" (S. 139).

Theorie der Erziehung schließt auch die Kenntnis darüber ein, wie die sozialen Voraussetzungen der Kinder sich auf ihre kognitive Entwicklung auswirken. Bruner widmet diesem Problem das Kapitel 9 "Kindheit und Armut". Hier referiert er die bisher vorliegenden Untersuchungen, die kognitive Benachteiligung als Folge sozialer Benachteiligung analysieren. Er versucht, diese Ergebnisse von der Kognitionspsychologie her zusammenzufassen, d.h. psychologisch die Mechanismen zu erklären, die zu Fehlentwicklungen führen. Man würde sich allerdings schärfere soziologische Begriffe wünschen als z.B. den Begriff "Armut".

Programmatisch formuliert Bruner die Notwendigkeit, über die Schule hinauszugehen, wenn man Schule richtig betreiben will: "...; denn wenn uns das vergangene Jahrzehnt etwas gelehrt hat, dann ist es die Erkenntnis, daß eine nur auf die Schule und nicht auf die gesamte Gesellschaft bezogene Bildungsreform schließlich zur Bedeutungslosigkeit verurteilt ist" (S. 135). Und Bruner zieht daraus eine sehr strikte wissenschaftstheoretische Konsequenz: "Ich bin davon überzeugt, daß die Psychologie der Entwicklungsförderung - und das ist die Pädagogik - in den politischen Schmelztiegel der Curriculumrevision eingegossen werden muß, bevor sie den Stand einer umfassenden Theorie erreichen kann" (S. 89).

VI. Bruners Name ist in der didaktischen Diskussion in den USA in starkem Maße verknüpft mit dem Begriff 'discovery learning'. Dem wurde dann von anderen Theoretikern (etwa Ausubel) der Begriff des 'expository teaching' entgegengestellt, und die sehr polemische Diskussion bewegt sich im Rahmen der folgenden Alternativen: Induktiv - deduktiv, nichtsprachlich - sprachlich, Benutzung konkret-materieller Stützen - keine Stützen, spontan - angeleitet, bedeutungsvoll - routinemäßig, intuitiv - analytisch.

Shulman stellt 1970 in einem Artikel 'Psychology and Mathematics Education' (in 69. Yearbook of the NSSE, Chicago 1970) als Zusammenfassung der bisherigen Diskussion fest, daß es notwendig sei, sich von der verfahrenen Alternative 'discovery learning' versus 'expository teaching' zu lösen, um die Diskussion produktiv weiterzuführen. Er arbeitet heraus, daß mehrere logisch voneinander unabhängige Ebenen unterschieden werden müssen, die in dem Begriffspaar 'discovery learning' - 'expository teaching' unzulässig auf eine einzige reduziert werden.

Der Vorwurf, der Bruner im Zusammenhang dieser Auseinandersetzung gemacht wird, Lernen ausschließlich in der Spontaneität des Individuums zu verankern, ist allerdings nicht gerechtfertigt. Bruners grundlegende theoretische Positionen stehen in direktem Widerspruch zu solchen Auffassungen. Demgemäß distanziert er sich in 'Relevanz der Erziehung' auch klar von jeder Verabsolutierung der Technik des 'discovery learning': "Wenn wir damit zugeben, daß die Evolution an einem bestimmten Punkt so verläuft, wie von Lamarck beschrieben, daß sie also die Möglichkeit beinhaltet, daß erwartete Charakteristika weitergegeben werden, nicht über die Gene, sondern durch das Medium der Kultur - wenn wir das annehmen, legt

das für mich die Folgerung nahe, daß über die Methoden der Entdeckung oder das eigene Entdecken als vornehmliches Mittel der Erziehung mit großer Vorsicht gesprochen werden sollte. Schlicht von einem biologischen Standpunkt aus betrachtet, scheint das überhaupt kein geeignetes Mittel zu sein" (S. 100).

Man muß hier wohl sehen, daß der Begriff des 'discovery learning' schlagwortartig benutzt wurde, um die Methode zur Lösung unterschiedlichster Probleme des Unterrichts zu benennen: Das Problem der Motivation und des Interesses, das Problem, mit der Trennung von Wissen und Aktivität fertigzuwerden, das Problem des Erwerbs von Kompetenz eher als von abfragbaren Kenntnissen. Vergegenwärtigt man sich Bruners Aussagen zu diesen Problemen, dann scheint es sicher nicht gerechtfertigt, seine Position auf das Schlagwort 'discovery learning' zu reduzieren. Das von Bruner mit dem zeitweilig verwendeten Terminus des 'discovery learning' intendierte Prinzip behauptete keineswegs eine absolute Spontaneität individueller Lernprozesse, sondern war abgeleitet aus seiner Auffassung von Sprache und Theorie als kulturelle Technologien, seiner Betonung des Methodologischen in der Wissenschaft. 'Discovery learning' im Bruner'schen Sinne meinte daher nichts anderes als die Organisierung des produktiven Umgangs mit Wissen im Unterricht. Es ist daher sicher sinnvoll, sich von dem Schlagwort zu lösen und den intendierten Inhalt ins Auge zu fassen.

Aufgrund von Plänen, die eine Kommission zur Reform des Mathematikunterrichts unter Vorsitz von Prof. André Lichnérowicz zwischen 1965 und 1967 erarbeitet hatte, wurden seit Ende 1968 in Frankreich von der Regierung mathematik-didaktische Institute aufgebaut (I.R.E.M. = Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques). Gegenwärtig gibt es 21 I.R.E.M., je eines pro "Académie", d.h. Schulverwaltungsbezirk. Jeder solche Bezirk umfaßt gewöhnlich drei bis vier Départements. Die Aufgaben dieser I.R.E.M. und deren Einschätzung werden in der folgenden Erklärung dargestellt. Die Erklärung ist erarbeitet worden von der "Nationalen Kommission der I.R.E.M." und wurde in dem "Bulletin Inter-I.R.E.M.", einer gemeinsamen Publikation der I.R.E.M., im November 1973 veröffentlicht.
Die "Nationale Kommission der I.R.E.M." ist ein Gremium, das die Verbindung aller I.R.E.M. zum Erziehungsministerium herstellt. Von ihr wird die grundsätzliche Koordination der inhaltlichen und finanziellen Entscheidungen vorgenommen.

DIE AUFGABE DER I.R.E.M. IN DER LEHRERFORTBILDUNG

Nationale Kommission der I.R.E.M.

Die Aufgabe der I.R.E.M. reiht sich in eine Gesamtpolitik der ständigen Fortbildung der Lehrer ein und geht von einer *Analyse der Ziele* des Mathematikunterrichts sowie von *Strategien* aus, mit deren Hilfe diese Ziele erreicht werden sollen:

-Dieser Unterricht soll lebensnah, berufsbezogen und den anderen Wissenschaften zugewandt sein. Das setzt Aufgeschlossenheit auf seiten der Lehrer und Schüler voraus. Unter dieser Perspektive müssen zahlreiche Aktivitäten der Motivierung der mathematischen Begriffe und ihren Anwendungen gewidmet werden. Insbe-

sondere ist es zu wünschen, daß die Klassen sich mit Problemen interdisziplinären Charakters befassen, was Unterstützung durch die Lehrer der verschiedenen Fächer erfordert.

-Dieser Unterricht muß einen Charakter haben, der die geistige Entwicklung der Kinder fördert und der eng an den Fortschritt von Wissenschaft und Technik gebunden ist. Es ist also zu wünschen, daß er - im Gegensatz zu allem erstarrten Dogmatismus - von Erfindergeist, Experimentierfreude und Forschergeist durch und durch belebt wird.

-Dieser Unterricht soll die Kreativität, die Autonomie, die Genauigkeit, den kritischen Geist, das Ausdrucksvermögen und die Kommunikationsfähigkeit fördern. Das erfordert ein aktives Verhalten von Lehrern und Schüler und ist darüber hinaus allein in der Lage, bei dem einen oder anderen ein wirkliches Interesse für die Mathematik hervorzubringen. Zur Verwirklichung dieses Ziels könnte man die Praxis des Stellens von Problemen und Übungen mit nicht vorherbestimmter Lösung ermutigen, an die sich eine kritische Analyse und Synthese der erhaltenen Resultate anschließt, welche ihrerseits wiederum Quellen neuer Fragen sind. Auch könnte man stufenweise die Fähigkeit entwickeln, ein wissenschaftliches Werk zu lesen, Unterlagen zu sammeln, Gesichtspunkte zu vergleichen, wissenschaftliche Fragen zu diskutieren.

* * *

Die obigen Forderungen sind keineswegs utopisch, aber sie erfordern eine ständige kollektive und individuelle Arbeit der *Mathematiklehrer*. Sie entsprechen im übrigen vollkommen dem Inhalt der Anfangsausbildung sowie der Fortbildung dieser Lehrer. Darüber hinaus ist es ratsam, die Aktivitäten und bisherigen Ergebnisse

didaktischer Art weiter zu entwickeln. Genannt seien z.B.:

-Analyse der Interessen und Möglichkeiten der Schüler im Bereich der mathematischen Wissenschaften. Bewußtmachen der Zielsetzung des Lehrens dieser Wissenschaften. Förderung ihrer wechselseitigen Entsprechung.

-Ausarbeitung einer genauen Definition der Ziele jeder Unterrichtsreihe, ihre Verdeutlichung der Gesamtheit der Schüler gegenüber und Planung eines angemessenen Vorwärtsgehens.

-Diversifizierung der Handlungstypen (Rechnungsdurchführung, heuristisches Herangehen an die Aufgaben, Handhabung und Mathematisierung konkreter Situationen, Problemformulierung, Zusammenstellen und Redigieren der Ergebnisse etc. ...), der Arbeitsmethoden und der Arbeitsmaterialien bezogen auf Ziele, Inhalte sowie die Motivation der Schüler.

-Analyse der Lernhindernisse in der Mathematik und Ausarbeitung von Strategien, die geeignet sind, diese zu überwinden.

Unter dieser Perspektive müssen die Lehrer ihre wissenschaftliche Bildung pflegen und vervollkommnen, sich über die gesamte Entwicklung der mathematischen Wissenschaften informieren und sich in der Erarbeitung und dem Gebrauch von wissenschaftlichen Unterlagen (Problemskizzen, Notizzettel, Anordnung der Unterrichtsinhalte) üben, sowie auch in der rationellen Anwendung der Unterrichtstechnologie und dem Einsatz verschiedener Beurteilungs- und Beobachtungsverfahren.

* * *

Damit diese Aufgaben erfüllt werden können, ist es

wünschenswert, daß die Mathematiklehrer Gruppen bilden, deren Arbeit natürlich durch Ausbildungseinrichtungen unterstützt und koordiniert werden muß, die eine besondere Kompetenz auf dem Gebiet der mathematischen Wissenschaften haben, und die sehr eng mit den anderen Einrichtungen der Lehrerausbildung zusammenarbeiten. In diesem Sinne wurden die I.R.E.M. geschaffen und mit folgenden Aufgaben betraut:

- Mathematische Fortbildung der Lehrer
- Forschung über das Lehren von Mathematik
- Ausarbeitung und Weitergabe von Unterrichtsunterlagen
- beizutragen zur Anfangsausbildung der Mathematiklehrer

Nun, seit ihrer Gründung im Oktober 1968 sind die I.R.E.M. mit der Situation konfrontiert gewesen, die durch den Einsatz der neuen Lehrpläne im Unterricht geschaffen worden war. Sie mußten den größten Teil ihrer Energie einer Aktualisierung der Kenntnisse der Lehrer widmen, die darauf abzielte, letztere rasch mit mathematischen Begriffen und Methoden vertraut zu machen, die für viele unter ihnen neu waren und die sie heute lehren müssen. Es muß hinzugefügt werden, daß die I.R.E.M. in vielen Fällen versuchen müssen, eine unzulängliche Anfangsausbildung wettzumachen.

* * *

Es ist notwendig, daß sich die I.R.E.M. künftig den durch ihre Gründer definierten Hauptzielen widmen, deren Bedeutung durch die Erfahrung der vergangenen Jahre offenkundig geworden ist.

1) Bereicherung der wissenschaftlichen Bildung der Lehrer, besonders in folgenden Gebieten: Mathematik -

Geschichte der Wissenschaften - Aufgeschlossenheit gegenüber anderen Disziplinen und der wissenschaftlich-technischen Welt - Didaktik der Mathematik - Erziehungswissenschaften.

2) Befürwortung der Bildung kleinerer Lehrergruppen - etwa innerhalb einer schulischen Einrichtung oder einer Gruppe von schulischen Institutionen -, die möglicherweise interdisziplinär zusammengesetzt sein können und deren Hauptaufgabe darin besteht, unter den oben skizzierten Perspektiven an der Verbesserung ihres Unterrichts zu arbeiten. Damit ein erfolgreiches Arbeiten möglich ist, müßten diese Gruppen die notwendige Unterstützung, besonders bei den I.R.E.M., finden (Zusammenarbeit der Berater und Fachleute, Dokumentation, spezielle Lehrgänge und Kolloquien). Unter diesem Gesichtspunkt stellen die I.R.E.M. einen Ort des Meinungsaustausches und der Begegnung dar, wo sich diejenigen treffen, die in verschiedener Hinsicht am Mathematikunterricht interessiert sind, und wo Lehrer verschiedener Stufen und verschiedener Fächer an gemeinsamen Aufgaben arbeiten.

3) Leistung eines Beitrags zur mittelfristigen Entwicklung des Mathematikunterrichts mit Hilfe einer Grundlagenforschung, die geeignete Experimente umfaßt und die sich auf eine ausgedehnte Beobachtungstätigkeit stützt. Gewährleistung der Weitergabe und Verarbeitung der erzielten Ergebnisse und die Leistung eines Beitrags zu ihrer möglichen allgemeinen Anwendung, besonders durch das Anbieten und Anregen vorläufiger Phasen einer teilweisen Revision.

4) Ausarbeitung und Verbreitung einer viele Aspekte berücksichtigenden Dokumentation.

5) Leistung eines Beitrags zur mathematischen Fortbildung durch die verschiedenen, für die Ausbildung verantwortlichen Personen (Professoren der Ecoles Normales, pädagogische Berater, in der Erwachsenenbildung tätige Lehrer ...).

Alle diese Aufgaben können nur auf der Grundlage einer genauen Analyse der Bedürfnisse der Schüler sowie der Lehrer hinsichtlich der dauernden Fortbildung erfüllt werden. Die I.R.E.M. müssen sich damit auseinandersetzen und zu diesem Zweck die Hilfe von Fachleuten auf dem Gebiet der Erziehungswissenschaften in Anspruch nehmen.

* * *

Eine der wichtigsten Aufgaben der I.R.E.M. ist es, pädagogische Gruppen ins Leben zu rufen, wie es oben schon angedeutet wurde. Diese Arbeit darf allerdings nicht einzig und allein auf den Mathematikunterricht in dem Bereich der zweiten Stufe beschränkt bleiben. Zu diesem Zweck wäre es angebracht, bereits von den I.R.E.M. eingeleitete Aktivitäten weiter zu entwickeln, wie z.B.:

1) Die Bildung von Gruppen aus Physik- und Mathematiklehrern, die gemeinsam einen koordinierten Mathematik- und Physikunterricht vorbereiten und dabei von Beratern unterstützt werden, die sowohl Physiker als auch Mathematiker sein könnten. Schon jetzt kann man die Ausweitung solcher Aktivitäten auf den Bereich der Biologie, Ökonomie und der Geographie in Aussicht nehmen und so zur Einrichtung eines synthetisierenden Studiums der heutigen Welt beitragen.

2) Die Bildung von Gruppen aus Lehrern der Technikerschulen, Mathematiklehrern der technischen Gymnasien

und Professoren, die auf verschiedenen technologischen Gebieten spezialisiert sind, und die den Stellenwert des Mathematikunterrichts in den Technikerschulen, den technischen Gymnasien, und umgekehrt, die Einführung von Themen, die aus technologischen Problemstellungen hervorgegangen sind, in das klassische Curriculum untersuchen.

3) Die Förderung der Bildung von Gruppen, die sich dem Elementarunterricht widmen und die Professoren der Ecoles Normales, der I.D.E.N., pädagogische Berater, Volksschullehrer, sowie Betreuer aus den I.R.E.M. umfassen. Ihre Arbeit soll darin bestehen, an der Vorbereitung der ständigen Weiterbildung der Lehrer des Elementarunterrichts mitzuhelfen, indem sie die Forschungsergebnisse über die Aneignungsprozesse mathematischer Grundbegriffe berücksichtigen.

Es bliebe noch zu untersuchen, auf welche Art und Weise eine solche Politik in die Praxis umgesetzt werden kann. Wenn man bei den Lehrern der zweiten Stufe die durch das Gesetz vom 16. Juli 1971 im Bereich der Privatschulen fixierten Normen anwenden würde, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die für die Fortbildung der Volksschullehrer vorgesehenen Normen, dann könnten 15 - 20 % der Lehrkräfte von einer Weiterbildungsmöglichkeit Gebrauch machen, bei einer Kürzung ihres Lehrdeputates um drei Wochenstunden. Die Anzahl der erforderlichen Lehrkräfte ist sicherlich von der Art der vorgesehenen Weiterbildungsmaßnahmen abhängig; wenn man die Zeit in Rechnung stellt, die für die Ausarbeitung von Unterlagen, für die Einrichtung von angeleiteten Arbeitsgruppen mit einer geringen Mitgliederzahl (höchstens 12 - 15) und für die Einrichtung von Forschungsgruppen (höchstens 10 Personen) notwendig

gewesen ist, dann ist die Schätzung realistisch, daß für 25 Kursteilnehmer ein Betreuer erforderlich ist, der für die Hälfte seiner Arbeitszeit dem I.R.E.M. zur Verfügung steht.

Um die Integration des Mathematikunterrichts in eine zusammenhängende wissenschaftliche Bildung zu erleichtern, wäre es darüber hinaus wünschenswert, daß Lehrer anderer Fächer für die I.R.E.M. freigestellt würden, damit sie sich an interdisziplinären Projekten beteiligen können.

Um zu einer Erneuerung des Elementarunterrichts zu kommen, müßte man auch bestimmten Volksschullehrern die Möglichkeit geben, einen Teil ihrer Arbeitszeit einer pädagogischen Forschungsarbeit zu widmen, die in Verbindung mit einem I.R.E.M. organisiert ist.

Schließlich muß das Interesse der Forscher an direkten Kontaktmöglichkeiten mit Schülern unterstrichen werden, und folglich gilt es, die Möglichkeiten der Zusammenarbeit zwischen I.R.E.M. und solchen Schulen (Grundschulen, höhere Schulen, Technikerschulen, Gymnasien ...) zu untersuchen, an denen man pädagogische Gruppen bilden könnte, die genügend viel Zeit für Forschung zur Verfügung hätten. In diesen Schulen könnten stufenweise und vorsichtig neue Inhalte und neue Lehrmethoden der Mathematik ausgearbeitet und erprobt werden. Die Einsetzung pädagogischer Gruppen und ihre Arbeitsbedingungen müßten in jedem Einzelfall genau geklärt werden, um höchstmögliche Wirksamkeit zu gewährleisten.

Ebenso wäre es, vor allem auf örtlicher Ebene, angebracht, die Einrichtung von Sektoren der Erneuerung in zahlreichen und verschiedenartigen Schulen zu fördern, die es gestatten, die Lehrer anzusprechen,

die an einer Neugestaltung ihres Unterrichts interessiert sind, Ansätze für neue Forschungen aufzufinden und die Forschungsergebnisse weiterzugeben, die zu Erfolgen geführt haben. Kern dieser Bereiche müßte eine interdisziplinäre Gruppe von Lehrern sein.

Eine interessante Neuerscheinung:

L.V. Zankov — DIDAKTIK UND LEBEN

aus dem Russischen übersetzt und mit einer Einführung versehen von Bernhard Schiff

Hermann Schroedel Verlag KG

Hannover-Darmstadt-Dortmund-Berlin

Aus: Beiträge zu einer neuen Didaktik

Reihe A: Allgemeine Didaktik

herausgegeben von Prof.Dr.Heinrich Roth unter Mitwirkung von Prof.Dr.Heinrich Bauersfeld, Dr.Alfred Blumenthal, Prof.Dr.Klaus Gerth, Prof.Dr.Wolfgang Mitter, Prof.Dr.Horst Ruprecht

Zur Vorstellung des Buches sei die Einführung des Übersetzers zitiert, die wir mit freundlicher Genehmigung von Autor und Verlag hier abdrucken.

Im Jahre 1966 wurde in der Sowjetunion eine durchgreifende Reform der Grundschule eingeleitet. Das äußere Merkmal dieser Grundschulreform, der eine neue didaktische Konzeption zugrunde liegt, ist die Verkürzung des Grundschulkurses (Primarstufe) von vier auf drei Jahre bei annähernd gleichen Bildungszielen. Der Grundgedanke der

Reformkonzeption kommt am besten in dem Schlagwort vom "entwickelnden Unterricht" zum Ausdruck, das in der Diskussion der Reformprobleme geprägt worden ist und seine Herkunft aus dem Themenkreis der sowjetischen pädagogischen Forschung nicht verleugnen kann.

Die Vorgeschichte dieser Reform, die im wesentlichen ein Werk der pädagogischen und psychologischen Forschung ist, ist mit dem Namen Leonid Vladimirovic Zankovs und des von ihm geleiteten *Laboratoriums fuer Erziehung und Entwicklung der Akademie der paedagogischen Wissenschaften der UdSSR* aufs engste verknüpft. Zankov und seine Mitarbeiter, zu denen über den Kreis des *Laboratoriums* hinaus auch die zahlreichen Grundschullehrer und -lehrerinnen zu zählen sind, haben in zahlreichen Unterrichtsversuchen in über 1000 Schulklassen eine Reihe didaktischer und lerntheoretischer Thesen entwickelt und erprobt, die zu Bestandteilen der neuen Konzeption des Grundschulunterrichts geworden sind. Zankov und seinen Mitarbeitern ist dabei der Nachweis gelungen, daß es möglich ist, durch die Umstellung des Grundschulunterrichts auf eine neue, die Entwicklung der Gesamtpersönlichkeit des Kindes gezielt fördernde didaktische Grundlage die Bildungsziele der Grundschule früher als bisher zu erreichen.

Die Ergebnisse der von Zankov geleiteten umfangreichen Forschungsarbeiten, die seit 1957 ausschließlich der Klärung der Zusammenhänge zwischen dem Unterricht und geistig-seelischen Entwicklung des Kindes gewidmet sind, sind in der hiermit erstmals in deutscher Übersetzung vorgelegten Schrift *Didaktik und Leben* resümiert. Für diese Arbeit und sein Buch *Gespraeche mit Lehrern (Besedy's uciteljami, M. 1970)* wurde Zankov 1971 mit dem *Krupskaja-Preis* ausgezeichnet; 1972 wurde ihm für seine hervorragenden Verdienste auf dem Gebiet der Pädagogik der Lenin-Orden verliehen.

Zankovs Wirken, von dem dieses Buch ein beredtes Zeugnis ablegt, ist durch ein doppeltes Engangement gekennzeichnet; es betrifft sowohl die Unterrichtspraxis, zu deren Veränderung seine Untersuchungen einen Beitrag leisten, als auch die pädagogische und didaktische Theorie, die von ihm in fruchtbringender kritischer Auseinandersetzung weiterentwickelt wird.

Die Untersuchungen Zankovs und seiner Mitarbeiter sind dabei auch als ein Beitrag zur Lösung des in allen Bildungssystemen vielbeklagten Problems des Verhältnisses von Theorie und Praxis in der Pädagogik anzusehen. Seine mit Vehemenz vorgetragene Kritik, die einen Eindruck von der Intensität der pädagogischen Diskussion in der Sowjetunion vermittelt, richtet sich sowohl gegen die traditionelle Praxis des Grundschulunterrichts, die den neuen Aufgaben der sowjetischen Schule nicht mehr gerecht werden kann, als auch gegen die veralteten Methoden der pädagogischen Forschung, die keinen wirksamen Beitrag zur Veränderung dieser Unterrichtspraxis zu leisten vermögen.

Die Fehler der traditionell betriebenen didaktischen Forschung bestehen nach Zankovs Auffassung darin, daß sie ihre Aufgaben ausschließlich mit theoretischen Mitteln zu lösen sucht, ohne die pädagogische Wirklichkeit empirisch zu untersuchen. Zankov schreibt dazu:

> "Das eklatante Mißverhältnis zwischen den wachsenden Anforderungen an die pädagogische Wissenschaft und der Art und Weise, in der die didaktischen Fragen erarbeitet werden, dem zu allgemeinen Ansatz ihrer Erörterung, ist offenkundig..." (Zankov 1962 a; 39).

Und er schreibt weiter über die Ursachen dieses Mißverhältnisses:

"Worin bestehen aber die Ursachen dieser unhaltbaren Lage in der Didaktik? Bleiben wir bei einigen von ihnen. Es sind: der Konservatismus bei der Erarbeitung didaktischer Probleme, unrichtige Auffassung von den Aufgaben und dem Gegenstand der Didaktik, Primitivität der Forschungsmethodik. Der Konservatismus äußert sich darin, daß die zu untersuchenden Erscheinungen des Schullebens in das Prokrustesbett der immer gleichen didaktischen Prinzipien, Regeln, Begriffe der Vergangenheit gezwängt werden." (Zankov 1962 a; 39).

Der von Zankov kritisierte Zustand der didaktischen Forschung ist nach seiner Ansicht an erster Stelle dafür verantwortlich, daß der Grundschulunterricht den neuen Anforderungen an die Bildung des Menschen nicht genügen kann. Die didaktische Forschung habe hier als Bindeglied zwischen der im Allgemeinen operierenden Theorie und der zu verändernden Unterrichtspraxis eine doppelte Aufgabe zu übernehmen: indem sie die Änderung der Unterrichtspraxis in einer gewünschten Richtung zum Gegenstand der Forschung macht, gewinnt sie zugleich allgemeingültige Erkenntnisse über das Wesen der zu erforschenden Beziehungen. Die wichtigste Methode einer solchen didaktischen Forschung sei das Experiment.

Zankov beschreitet dabei in eigenen Untersuchungen den Weg eines interdisziplinären Verfahrens, indem er seine didaktischen Hypothesen mit den Mitteln gesicherter experimentalpsychologischer Verfahren zu verifizieren sucht. Das integrierte Produkt dieser interdisziplinären Forschungsarbeit ist ein "neues didaktisches System", dessen Grundforderungen, wie die nach der schnellen Durcharbeitung des neuen Lehrstoffes, nach seinem erhöhten kognitiven Gehalt und dem optimal erhöhten Schwierigkeitsgrad, nach der Vermeidung ein-

schleifender Wiederholungsübungen u.a.m., einer kompromißlosen Absage an die herkömmliche, weitgehend auf den Anregungen der Reformpädagogik fußende Methodik des Grundschulunterrichts gleichkommen und im Kontext der internationalen lerntheoretischen Diskussion viele Entsprechungen finden.

Zankov bewegt sich dabei auf der Linie der besten Tradition der sowjetischen Pädagogischen Psychologie, indem er sich auf die lerntheoretischen Thesen des 1934 verstorbenen Psychologen L.S. Vygotskij stützt, dessen Mitarbeiter er gewesen ist.

Vygotskij stellte seinerzeit - nicht zuletzt durch die Auseinandersetzung mit den Gedanken Piagets angeregt - die These von zwei Ebenen der geistigen Entwicklung des Kindes auf: der Ebene des "aktuellen Niveaus" und der der "Zone der nächsten Entwicklung". Im Bereich des aktuellen Niveaus liegen die geistigen Funktionen, die das Kind zur Lösung bestimmter Aufgaben selbständing einsetzen kann, in der Zone der nächsten Entwicklung dagegen befinden sich die Funktionen, die zu ihrer Entfaltung eines Anreizes von außen bedürfen. Sie können und sollen mit Hilfe des Erwachsenen, da nach Vygotskij das Lernen grundsätzlich ein sozialer Prozeß sei, "geweckt und ins Leben gerufen werden" (Vygotskij). Die Pädagogik habe deshalb die Aufgabe, nach Ansatzmöglichkeiten in der Zone der nächsten Entwicklung zu suchen, um die Entwicklung des Kindes zu fördern. Dieser Teil der Lerntheorie Vygotskijs bildet die Grundlage für die entwicklungsbeschleunigenden didaktischen Maßnahmen im "neuen didaktischen System", das von Zankow und seinen Mitarbeitern entwickelt worden ist.

Der Entwicklungsfortschritt des Kindes bildet demnach den zentralen Orientierungspunkt der Didaktik Zankovs und ist der Maßstab für alle weiteren didaktischen

Überlegungen. Die Frage danach, ob der Vermittlung bestimmter Wissensinhalte oder der Förderung der Persönlichkeitsentwicklung bei den didaktischen Entscheidungen der Vorrang zu geben sei, muß im Lichte einer prospektiven Pädagogik, die das Kind auf die Bewältigung zukünftiger Lebenssituationen vorbereiten will, neu überdacht werden.

Fragt man also im Sinne einer prospektiven Pädagogik, als welche sich auch die sowjetische Pädagogik weitgehend versteht, nach den Problemen, denen die Menschen in voraussehbarer Zukunft gegenübergestellt werden können, so ist die "Explosion des Wissens" ohne Zweifel eines der wichtigsten Probleme unserer Zukunft, dessen Bewältigung eine der Hauptaufgaben der Wissenschaft als Ganzes bilden wird. Es ist zugleich auch ein ureigenes Problem der Didaktik, die auf ständige Auseinandersetzung mit Wissen und Wissenschaft angewiesen ist. Es ist offensichtlich, daß die Didaktik das Problem der Wissensbewältigung durch die Auswahl bestimmter Wissensinhalte nicht mehr befriedigend lösen kann, weil sich deren Relevanz für die Zukunft nicht mehr eindeutig bestimmen läßt.

Zankov schreibt in diesem Zusammenhang:

"Man kann die Bedeutung der *allgemeinen Entwicklung* der Schüler für ihre zukünftige Tätigkeit nach der Absolvierung der Schule kaum überschätzen. Der Fortschritt der Wissenschaft und der Technik in unserem Land ist so stürmisch, daß die Schulbildung ihn nicht aufholen kann, so gut aufgebaut sie auch sein mag. Es ist natürlich unbedingt notwendig, die Lehrpläne, Lehrbücher und Unterrichtsmethoden dem modernen Stand der Wissenschaft und der Technik anzupassen. Der junge Mensch stößt jedoch, nachdem er die Schule verlassen hat, so oder so auf neue Entdeckungen der

Wissenschaft, auf neue Technik. Nur derjenige, der die entsprechenden Eigenschaften des Verstandes, Willens und Gefühls besitzt, wird sich schnell orientieren und die unbekannten Daten erfolgreich beherrschen können." (Zankov 1966 b; 58).

Die angedeuteten Aspekte lassen die Thesen Zankovs - vor allem die von ihm vorgenommene Verlegung des Zentrums didaktischer Orientierung aus dem Bereich der Bildungsinhalte in den der geistig-seelischen Entwicklung des Kindes -, losgelöst aus ihrer Abhängigkeit von den spezifischen Bedingungen der Schulentwicklung in der Sowjetunion, als einen Beitrag zur Konzipierung einer zukunftsorientierten Didaktik verstehen.